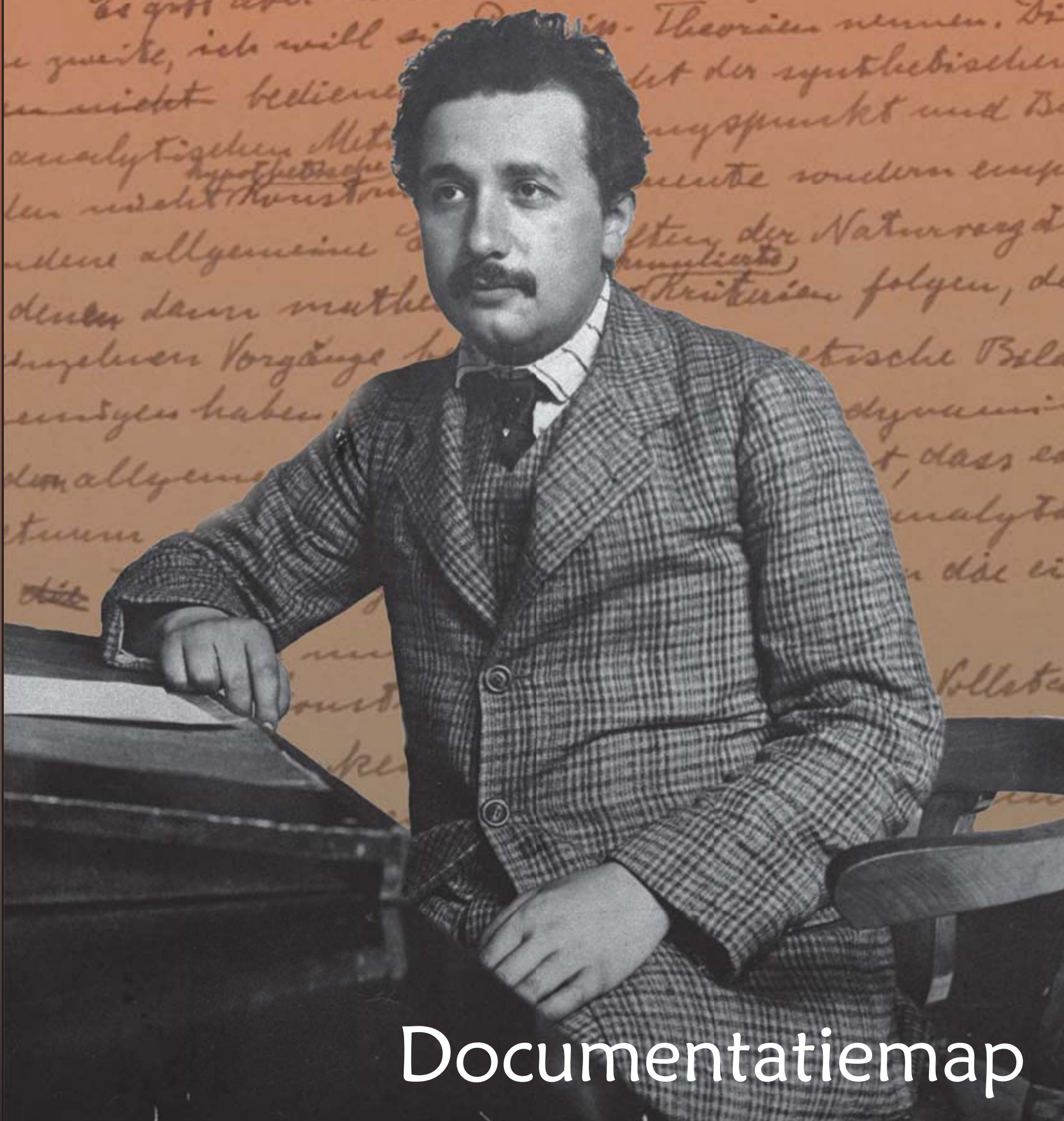
... de rest zijn details

Einstein 1905-2005



Documentatiemap

Start van de moderne fysica

Christian Maes

extra documentatie bij de vertaling van de publicaties
van Albert Einstein uit 1905 door **Frans A. Cerulus**

`christian.maes@fys.kuleuven.be`
`frans.cerulus@fys.kuleuven.be`

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

Inhoudsopgave

Dank

Dank gaat naar Tim Jacobs voor vele aanbevelingen en hulp bij het tot stand komen van deze tekst. Dank aan Frans Cerulus voor verscheidene suggesties en voor de gunst de vertalingen van de publicaties van Einstein uit 1905 te mogen opnemen als Hoofdstuk 3.

De tekst overlapt in grote mate met andere geschriften die ik de laatste jaren over de start van de moderne fysica heb gepleegd. Naar de toekomst hoop ik dat het volgende ooit bruikbaar kan zijn om een nuttig leerboek over het onderwerp te laten verschijnen. Moge er gauw een schrijver opstaan...

Langdorp, 21 maart 2005
Christian Maes

Inleiding

In 2005 vieren we de 100ste verjaardag van het *annus mirabilis*, het wonderjaar, van Albert Einstein. In 1905 publiceert de 26-jarige Einstein vier artikelen die de fysica en de natuurfilosofie grondig en blijvend zullen beïnvloeden. Verschillende vraagstukken van het einde van de 19de eeuw werden tot hun logische conclusie gebracht en luidden tegelijk een revolutie in voor de fundamenten van de natuurwetenschappen. De implicaties zijn verregaand en zullen overal opduiken in de volgende 100 jaar.

Een eerste triomf uit 1905 betekent een bevestiging van het atomisme of van de moleculaire structuur van de materie. Omdat een vloeistof bestaat uit botsende moleculen werken er toevallig verdeelde krachten in op daarin vrij zwevende deeltjes. Daarmee beschrijft Einstein de Brownse beweging, de krioelende beweging van heel kleine korreltjes in een vloeistof. Ook vervolmaakt Einstein het werk van Max Planck over de straling die verwarmde voorwerpen uitzenden. Niet alleen materie (atomen) of elektrische lading (elektronen) maar ook licht bestaat uit discrete pakketjes (kwanta), de zogenaamde lichtdeeltjes of fotonen. Dat verklaart onder andere het aan metaaloppervlakken optredend foto-elektrische effect. Tenslotte is 1905 het jaar van de speciale relativiteitstheorie. Men kan het een unificatie van mechanica en elektromagnetisme noemen. Deze mechanica van hoge snelheden ontstaat wanneer Einstein zich afvraagt hoe de wereld er uitziet wanneer men meebeweegt met het licht.

De volgende bladzijden verdelen het bovenstaande in 4 delen.

Hoofdstuk één is een overzicht van de stand van de fysica rond 1900. Net zoals Newton, stond Einstein op de schouders van reuzen. De publicaties van Einstein zijn telkens logische syntheses en bevatten fundamentele suggesties ter oplossing van spanningen die bestonden tussen de toenmalige thermodynamica, de mechanica en het elektromagnetisme. Die woorden vragen meer uitleg; dat is voor het eerste hoofdstuk.

Hoofdstuk twee geeft een bespreking van de publicaties uit 1905. Ik geef de hoofdonderwerpen en de achtergrond bij de fysica. De redeneringen en de resultaten van Einstein komen hier speciaal op de voorgrond. Ik verwijs daarbij regelmatig naar de letterlijke tekst van de publicaties.

Het derde hoofdstuk bevat de vertalingen van de 4 publicaties uit 1905 in de *Annalen der Physik*. Hierdoor zou de toegankelijkheid tot het werk van Einstein nog vergroot moeten worden; het blijft zeer leerrijk die oorspronkelijke teksten te lezen en de gedachtengang van Einstein letterlijk te volgen. De vertalingen zijn gemaakt door em. Prof. Frans A. Cerulus. Ik verwijs naar zijn eigen inleiding voor verdere duiding.

Tenslotte zal het vierde hoofdstuk een perspectief geven van ontwikkelingen in de moderne fysica die rechtstreeks verbonden zijn met het wonderjaar. De opkomst van de statistische mechanica, de ontwikkeling van de kwantummechanica en de kosmologie als belangrijkste toepassing van de algemene relativiteitsteorie, zijn allen schatplichtig aan die publicaties uit 1905. Aan het begin van de 21ste eeuw duiken evenwel nieuwe spanningen op tussen de moderne fysische theorieën terwijl ook de klassieke fysica nog steeds belangrijke onopgeloste problemen en onoverzienbare uitdagingen kent. Het einde van de fysica is voorlopig niet in zicht.

De persoon Einstein zelf komt niet onder de schijnwerpers. Dat betekent dat ik slechts hier en daar iets uit de biografie van Einstein licht en dat ik verder niet stilsta bij zijn persoonlijke geschiedenis. Ik volg hier het advies van Einstein zelve:

Mijn leven is eenvoudig en zal niemand interesseren; het is een

gekend feit dat ik geboren ben en dat moet volstaan.

Voor de meer gevorderde fysicus neem ik aan dat het plezier niet mag onderschat worden iets herkenbaar of zelfs verstaanbaar te lezen waarover men eigenlijk wel meer weet.

Evenmin wil ik de wiskundige theorie uiteenzetten. De wiskunde van Einstein uit 1905 is trouwens vrij eenvoudig. Voor de rest is wiskunde dikwijls nodig maar er is niets om ongerust over te zijn: wiskunde moet helpen en mag niet verduisteren. Einstein geeft ons moed:

Wees niet bezorgd over jouw problemen met wiskunde, ik verzeker je dat de mijne veel groter zijn.

Tenslotte zal ik weinig aandacht besteden aan de geschiedenis van de wetenschappelijke ideeën. Sleutelfiguren en -episodes worden slechts zijdelings vermeld zonder een systematische behandeling te geven van de historische ontwikkeling. In het bijzonder ga ik voorbij aan vragen over prioriteiten of aan het ontleden van de specifieke bijdrage van Einstein *versus* zijn inspiratiebronnen.

Hoofdstuk 1

Fysica rond 1900

De lange aanloop tot het wonderjaar

Mits enige vereenvoudigingen kan de fysica van de 19de eeuw worden opgedeeld in drie grote domeinen. Te weten: de mechanica, het elektromagnetisme en de thermodynamica.

1.1 Mechanica

Mechanica is het paradepaardje van de fysica en staat als voorbeeld voor zowat elk domein in de wetenschappen.

Zoals direct opvalt in de natuur is er een opvallende dynamiek aanwezig. Dingen veranderen. In mechanica gaat het allereerst om de eenvoudigste soort van verandering in de tijd, deze van plaats of positie. De regelmatige beweging van onze trouwe satelliet, de maan, en dat de nachten ons (dikwijls) toelaten om planeten en sterren te observeren, zal mensen reeds lang geleden hebben aangemoedigd te zoeken naar systematische beschrijvingen van deze *hemelmechanica*.

Het feit dat de *bovenmaanse* bewegingen aan dezelfde natuurwetten voldoen als de *ondermaanse* is onderwerp van het verhaaltje van de appel van Newton. Isaac rust uit onder een appelboom en bij het vallen van een vrucht beseft hij opeens dat de beweging

van de vallende appel en van de maan of de planeten allen beschreven zijn door dezelfde mechanica. Dat inzicht, hoe het ook ontstond, betekende een belangrijke eerste unificatie in het natuurwetenschappelijk denken en zal hand in hand gaan met het programma van reductionisme waarin een grote verscheidenheid van natuurfenomenen worden herleid en als het ware convergeren naar een steeds kleinere familie van meer elementaire en unieke fysische principes en wetten. Dat geloof in wetmatigheid binnen ogenschijnlijk ongerelateerde en wildvreemde verschijnselen vervult Einstein met ontzag als hij in een essay uit 1930 schrijft:

Welk een diepe overtuiging van de rationaliteit van het universum en welk een drang om te begrijpen,... moeten Kepler en Newton niet gevoeld hebben om vele jaren van eenzame arbeid te besteden aan het ontrafelen van de principes van de hemelmechanica.

Ik laat de geschiedenis van de mechanica hier terzijde[1]. Ik beperk me in wat volgt tot een algemene inleiding over het onderwerp van de mechanica.

Vermits het een fysische theorie is, staan een aantal experimentele feiten aan de basis. Deze zijn slechts bij benadering waar; het betreft hier immers de klassieke mechanica. Laat ons nu echter even doen alsof die experimentele feiten exact waar zijn. Verderop zullen ze herhaald worden en vertaald in een formeler kader.

Ten eerste is er onze ruimte-tijd structuur. Ruimte heeft drie dimensies en voldoet aan de axioma's van de Euclidische meetkunde. Tijd is ééndimensionaal. De beschrijving van verplaatsingen is onderwerp van sectie 1.1.1. Ten tweede is de beweging deterministisch en wel zo dat de volledige beschrijving op één bepaald ogenblik van snelheden en posities van de punten van ons mechanisch systeem, de gehele evolutie determineert. Met andere woorden, we stellen vast dat onder identieke condities de beweging van een bepaald voorwerp reproduceerbaar eenduidig verloopt als we het maar telkens dezelfde beginpositie en beginsnelheid geven. Een derde experimenteel feit is het relativiteitsbeginsel van Galileo. Stel een trein

[1]...maar verwijs graag naar de klassieker *Mechanisering van het Wereldbeeld* door Dijksterhuis.

die met constante snelheid over een recht stuk spoor beweegt. Dan kan je de beweging van de trein niet ontdekken door experimenten die je daarbinnen als passagier uitvoert. De fysische wetten lijken invariant, niet alleen in ruimte en tijd, maar ook voor waarnemers die met een constante snelheid bewegen.

1.1.1

Kinematica

Eerst en vooral is er het intuïtieve beeld van ruimte en tijd. De ruimte en de tijd zijn absoluut en vormen de arena van alle gebeurtenissen. Voor dat onveranderende decor gebruiken we de Euclidische meetkunde om tijdsduur en afstanden te meten, de basis van deze ruimte-tijd structuur.

Een positie van een voorwerp kan veranderen in de tijd. We kunnen daarvoor coördinaten gebruiken. Voor een rechtlijnige beweging, bijvoorbeeld langs de x-as, krijgen we een beschrijving van de beweging door voor elke tijd t de positie $x(t)$ te bepalen. Denk aan de beweging van een trein over een recht stuk spoor. De beschrijving wordt natuurlijk nauwkeuriger naargelang we de positie voor meer en meer ogenblikken kennen.

Het begrip snelheid is ons ook goed bekend: we bekijken de verandering van positie per tijdseenheid. Overbrugt het voorwerp een afstand Δx in een tijdsduur Δt, dan is de gemiddelde snelheid

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Bijvoorbeeld, als het voorwerp start op tijd $t-\delta/2$ op positie $x(t-\delta/2) = b$ en zich bevindt op positie $x(t+\delta/2) = a$ op tijd $t+\delta/2$, dan is de gemiddelde snelheid rond tijd t daar

$$v_{\text{gem}} = \frac{a-b}{\delta} \tag{1.1.1}$$

Hoe kleiner het interval δ wordt, hoe nauwkeuriger zo de snelheid op tijd t bepaald kan worden. In de limiet $\delta \downarrow 0$ spreken we gewoon over de (ogenblikkelijke) snelheid op tijd t. Herhalen we dat voor

elke tijd t, dan krijgen we een nieuwe beschrijving $v(t)$, nu van de snelheden op elk moment.

De volgende stap is ons ook nog vertrouwd. We kunnen kijken naar de versnelling $a(t)$ van het voorwerp op elke tijd t; dat is de verandering van snelheid. De procedure is net dezelfde als deze waarmee we van positiebeschrijving naar snelheidsbeschrijving gingen. Eerst kan je de gemiddelde versnelling berekenen als de verandering van snelheid per tijdsduur

$$a_{\text{gem}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.1.2}$$

en als je de tijdsintervallen als maar kleiner neemt, bepaal je zo de versnelling $a(t)$ voor het hele traject. Bemerk dat een versnelling in feite ook een vertraging kan zijn; dan neemt de snelheid af en is het teken van $a(t)$ negatief.

Tot dusver werken de formules goed in 1 dimensie; dat is wat we bedoelen met een rechtlijnige beweging. Willen we dat veralgemenen naar onze drie dimensies, dan kunnen we dat bijvoorbeeld doen door de beweging te ontbinden naar de drie assen van een Cartesisch coördinatenstelsel. We spreken dan over de snelheid en de versnelling in de $x-$ of in de $y-$ of in de $z-$richting. Dat zal hier verder niet zo belangrijk zijn. Dimensies hoeven echter niet alleen ruimtelijk gedacht worden. Ze kunnen ook slaan op de meer algemene notie van bewegingsvrijheden. Als we zeg twee deeltjes hebben, zullen beide posities, snelheden en versnellingen hebben en die zijn mogelijks gecorreleerd. Wat het ene deeltje doet, kan de beweging van het andere deeltje beïnvloeden en *vice versa*. Denk aan botsingen tussen knikkers of biljartballen. Ik zal dat verder niet expliciet opnemen in de notatie en blijf bijvoorbeeld $x(t)$ schrijven voor het geheel van de posities op tijd t van alle deeltjes of voorwerpen samen.

Veel belangrijker dan die notatie is echter in te zien dat we de weg $x(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow a(t)$ in omgekeerde zin van hierboven kunnen bewandelen. Stel je immers voor dat je de beginpositie $x(0)$ op tijdstip $t = 0$ kent evenals de snelheden op elk moment. Dan is het niet zo moeilijk om daaruit de posities van het voorwerp af

te leiden. Het eenvoudigste voorbeeld is voor constante snelheid $v(t) = V$. Dan is $x(t) = x(0) + Vt$. Evenzeer kunnen we uit de waarden $a(t)$ van de versnelling de veranderingen van snelheid en dus ook de snelheden $v(t)$ bepalen als een beginsnelheid $v(0)$ is gegeven. Zetten we die berekeningen na elkaar, dan reconstrueren we zo het hele traject uit de kennis van een beginpositie en een beginsnelheid, als we maar de versnellingen kennen op elk moment.

Die hele doos van begrippen en beschrijvende elementen met hun onderlinge relaties noemen we de *kinematica*. De wiskunde hiervoor is de differentiaal- en integraalrekening, tegelijk met de mechanica ontwikkeld sinds de tijd van Isaac Newton en Gottfried Leibniz (einde 17de eeuw). Dat staat nu onder de noemer *analyse* in studies wiskunde. Je merkt echter vlug dat het uittekenen van een beweging dikwijls eleganter werkt en inderdaad speelt meetkunde, beschrijvend en analytisch, hier ook een voorname rol. Isaac Newton zelf, in zijn *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* uit 1687, deed al zijn ontdekkingen zonder gebruik te maken van analyse. Hij bewees wat moest bewezen worden via directe elementaire meetkundige argumenten, weliswaar ongeveer equivalent aan analytische bewijsvoering. Het lijkt me nog altijd de juiste volgorde van studie, eerst meetkunde en later analyse.

1.1.2 Dynamica

De dynamica, het tweede deel van de mechanica, begint wanneer de bewegingswetten worden beschreven. Laat een steen los vijf meter boven de grond en probeer te weten wanneer en met welke snelheid die de grond raakt. Of, ik wil de periode van een slinger bepalen, of waarom niet, ik wil de beweging van de planeten rond de zon begrijpen.

Het project dat Newton en voorgangers daarvoor gestart hebben, centreert rond twee begrippen: dat van inertie en dat van kracht. We hebben natuurlijk wel enig gevoel voor deze begrippen. Inertie slaat op de weerstand tegen verandering. Kracht duidt op inwerking en op iets wat verandering bewerkstelligt. Het geven van

precieze definities en dan nog binnen de context van mechanica is echter niet zo eenvoudig en, gelukkig maar, voor vele gevallen en praktische doeleinden overbodig. We moeten ons echter de "truc" van Newton ongeveer zo voorstellen:

Hierboven herinnerden we ons dat uit een traject $x(t)$, de snelheden $v(t)$ en dan de versnellingen $a(t)$ kunnen gevonden worden, en ook omgekeerd mits kennis van de nodige beginvoorwaarden. Dat helpt ons echter geen stap verder ter bepaling van het volledige traject als we enkel de waarden van die grootheden kennen op één bepaald ogenblik. Dat is nochtans wat we willen in het merendeel van praktische problemen. We kennen bijvoorbeeld de positie en de snelheden van de aarde en de maan op tijd $t = 0$ en we willen die kennen voor alle latere en vroegere tijden.

Newton had nu de idee om die draad van afleidingen $x(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow a(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow x(t)$ in zekere zin kort te sluiten. Stel je immers voor dat de versnellingen $a(t)$ op tijd t van aarde en maan telkens gewoon een functie zijn van de posities $x(t)$ en de snelheden $v(t)$ op datzelfde moment. Dan kan je direct uit $v(t)$ en $x(t)$, tenminste voor een klein ogenblik δ later, de snelheid $v(t + \delta)$ en dus ook de positie $x(t + \delta)$ van zowel aarde als maan bepalen. We passen telkens de definities (1.1.1)–(1.1.2) toe. Nu komt de trein letterlijk en figuurlijk aan het rollen. Immers als ook weer de versnelling op die tijd $t + \delta$ functie is van $x(t + \delta)$ en $v(t + \delta)$, dan kunnen we weer verder rekenen, enzovoort. Wat we dus nodig hebben ter oplossing van ons dynamisch probleem is een functie $M(t, x(t), v(t))$ die ons vertelt wat de versnelling is op tijd t bij gegeven posities en snelheden. Immers, door te stellen dat

$$a(t) = M(t, x(t), v(t)), \quad \text{voor elke tijd } t \tag{1.1.3}$$

kan het volledige traject bepaald worden als we maar de posities en de snelheden op een bepaald ogenblik kennen.

Zo een functie M is natuurlijk niet het onderwerp van de kinematica; versnelling kan wel uitgedrukt worden als *verandering* van snelheid per tijdseenheid en snelheid is *verandering* van positie per tijdseenheid maar (1.1.3) wil de versnelling geven (van bijvoorbeeld

de maan) als functie van de ogenblikkelijke snelheid en positie (van maan en aarde).

Tot nu toe lijkt het bovenstaande niet veel meer dan een wiskundige truc; een extra vergelijking, met name (1.1.3) zal onze moeilijkheden oplossen. Hierna kunnen we beginnen rekenen. Het moet echter reeds opvallen dat we volgens de wiskunde eigenlijk een onnodige stap hebben gezet. We hadden ook kunnen eisen dat er een functie $N(x(t))$ bestaat van de ogenblikkelijke positie waarvoor $v(t) = N(x(t))$. Dat zou nog eenvoudiger geweest zijn — uit de posities van aarde en maan op tijd t zouden we de snelheden op tijd t kennen en dus ook alle posities op tijd $t+\delta$ enzovoort. Dat is inderdaad het punt waar de natuur komt meespreken: de mechanica van de natuur kan niet op voldoende wijze door het laatste beschreven worden maar wel, in zeer grote mate, door (1.1.3). De vergelijking (1.1.3) is dan ook de basis van de Newtoniaanse mechanica.

Er is nog meer te zeggen over het rechterlid in (1.1.3). Er is bijvoorbeeld het derde experimentele feit, het relativiteitsbeginsel dat beperkingen zal opleggen aan de vorm van de functie M. Dat stellen we uit tot de volgende paragraaf. Binnen het kader van (1.1.3) is er echter nog andere experimentele evidentie. Denken we bijvoorbeeld aan een voorwerp op een gladde tafel bevestigd aan een veer. Wanneer de veer niet hard wordt vervormd, wordt de beweging van het voorwerp heel goed beschreven door de wet

$$a = -\alpha^2 x$$

de versnelling is evenredig (via de constante $\alpha^2 > 0$) met de verplaatsing van het voorwerp uit de evenwichtspositie $x = 0$. Nu blijkt dat voor elk paar voorwerpen de verhouding van de versnellingen a_1/a_2 voor het eerste voorwerp ten opzichte van het tweede voorwerp, niet afhangt van de vervorming of de specifieke eigenschappen van de veer maar enkel van de voorwerpen zelf. Die verhouding is per definitie gelijk aan de inverse verhouding van massa's:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Of anders gezegd, het product van massa en versnelling $m \cdot a$ hangt verder niet af van het voorwerp maar enkel van de vervorming (uitrekking/samendrukking) en de eigenschappen van de veer. Dat blijkt het goede pad te zijn voor andere mechanische beschrijvingen. We zullen dus (1.1.3) liever herschrijven en de massa expliciet naar buiten brengen in de vergelijking. Aan elk voorwerp, zoals aarde of maan, is een grootheid toe te kennen, de massa m en de beweging wordt dan beschreven door de vergelijking

$$a(t) = \frac{1}{m} F(x(t), v(t)) \tag{1.1.4}$$

waarin de functie F een universele vorm heeft en enkel afhangt qua vorm van de specifieke interactie. Deze F noemen we de kracht en de laatste opmerking stelt ons in staat om te spreken over soorten krachten.

Bij Newton ging het vooral om de gravitatiekracht (of zwaartekracht). Deze kracht is mysterieus genoeg evenredig met het product van de massa's van de voorwerpen en voor de rest is de zwaartekracht enkel afhankelijk van de afstand tussen de twee voorwerpen, bijvoorbeeld maan en aarde. De gravitatiekracht is aantrekkend, richt zich in het verlengde van de verbindingslijn tussen de voorwerpen en wordt kleiner naarmate die afstand groter wordt. Staan ze twee keer zover, dan wordt de kracht gedeeld door vier. En het werkt. Behandelen we de zwaartekracht via vergelijking (1.1.4) met de gegevens over het maan–aarde systeem, en reken je door naar snelheden en posities, dan vind je de baan van de maan. Het is een succesverhaal: we kunnen vanuit die ene vergelijking de val van de appel beschrijven en ook de beweging van de planeten rond de zon. Zo kunnen we na Newton de wetten van Kepler over de planetenbeweging verifiëren.

In de vergelijking (1.1.4) van Newton speelt massa dus de rol van inertie: hoe groter de massa, hoe groter de weerstand tegen verandering van beweging opgelegd door de kracht F.

Ik wil nogmaals benadrukken dat (1.1.4) geen definitie geeft van kracht als massa maal versnelling. Het drukt het project uit van de Newtoniaanse mechanica. Men kan zich misschien een wereld

voorstellen waarin men ook de versnellingen op het initiële moment moet kennen om de toekomst van een systeem te voorspellen maar de ervaring leert dat onze wereld niet zo is. Dat is de inhoud van het tweede experimentele feit waarover begonnen is net voor deel 1.1.1. Dat betekent niet dat "hogere orde-" beschrijvingen nooit gepast zouden zijn; ik herinner me een expert spreken over het creëren van condities voor "een groeiende afremming van de deterioratie van de waterkwaliteit," dat is een verandering in derde orde...

1.1.3

Relativiteit

In het Newtoniaanse schema hoort bij een bepaalde kracht (zoals de gravitatie) dus een specifiek stelsel van dynamische (bewegings)vergelijkingen. Wanneer de posities, de snelheden en de massa's van de verschillende deeltjes gekend zijn op een bepaald ogenblik, worden die wiskundig bepaald ook voor alle latere ogenblikken. Het schema is essentieel dat massa maal versnelling gelijk is aan kracht, zoals in (1.1.4), maar korter $F = ma$, de vergelijking van Newton. Voor elk mechanisch systeem moet de vorm van de functie experimenteel bepaald worden maar we hopen natuurlijk dat de veelheid kan gereduceerd worden tot een klein aantal fundamentele krachten.

Eens de kracht en de massa gekend, krijgen we via $a = F/m$ de versnelling en door te *integreren*, dat is de wiskunde waarmee je de draad $a(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow x(t)$ afloopt, krijg je op het einde van je berekening het gehele traject. In het bijzonder, als er geen kracht werkt, is de snelheid constant en krijgen we onveranderlijke beweging in een rechte lijn. Zodoende is die eenparige rechtlijnige beweging ook ononderscheidbaar van rust. Als we de rotatie van de aarde even vergeten, is er niets wat ons hier verraadt dat we met een vaart van zo'n 100000 kilometer per uur ten opzichte van de zon bewegen. Dit heet het relativiteitsprincipe van Galileo.

Sluit u samen met een vriend op in de grootste kajuit onder het dek van een groot schip en neem wat vliegen mee, en vlinders en andere vliegende diertjes; neem ook een groot vat water mee met daarin

enkele visjes; hang ook een emmertje op waaruit water druppelt in een vaas met nauwe hals die je daaronder plaatst. Wanneer het schip onbeweeglijk is, merk dan aandachtig op hoe de vliegende diertjes zich in alle richtingen van de kajuit met gelijke snelheid verplaatsen. De vissen zwemmen overal op dezelfde wijze en de vallende druppels belanden allemaal in de vaas eronder ; indien u iets naar uw vriend toegooit, hoeft u niet krachtiger te werpen in de ene richting dan in de andere wanneer de afstanden gelijk zijn (...) Wanneer u dit alles zorgvuldig heeft waargenomen, zet het schip dan in beweging aan de snelheid die u wenst; indien de beweging gelijkmatig is, zonder gewieg in de ene of andere riching, dan zal u niet de geringste wijziging waarnemen in al de uitwerkingen die we zonet aangaven; niet één zal u doen beseffen of het schip beweegt dan wel stilligt. (Galileo, 1632)

De verzameling van referentiestelsels waarvoor de wetten van de mechanica en bij uitbreiding van de natuur gelijk zijn, noemen we inertiaalstelsels. Alle referentiestelsels die ten opzichte van zo een inertiaalstelsel in éénparige rechtlijnige beweging zijn, zijn zelf inertiaal. Een meer preciese beschrijving van dat principe van Galileo maakt gebruik van de notie van de groep van Galileo; dat is een wiskundige structuur, zeg een verzameling van transformaties op de ruimte-tijd structuur die de mechanica invariant moeten laten. We gaan daar niet verder op in. Het volstaat hier in te zien dat dit ons een constructief principe geeft om krachten te vinden of, op zijn minst, om bepaalde vormen van krachten uit te sluiten. We hebben het al gebruikt zonder het te vermelden. Bemerk hoe de expliciete afhankelijkheid van de tijd t in de functie M uit formule (1.1.3) stilletjes verwijderd is in de kracht F van formule (1.1.4). Eén van de Galileo-transformaties is een translatie in de tijd. Invariantie voor tijdstranslaties betekent dat de natuurwetten constant zijn in de tijd.

1.1.4

Energie

Het woord energie wordt in veel contexten gebruikt. Nochtans heeft het begrip energie een heel specifieke betekenis en rol in de

mechanica.

Laat ons starten met een voorwerp waarop geen krachten werken: $a = 0$. Voor zo een vrij deeltje is de energie E per definitie gelijk aan de kinetische energie K en verbonden met de beweging door de relatie

$$E = K = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.1.5}$$

waar m de massa is van het deeltje en $p = mv$ staat voor de impuls of hoeveelheid van beweging. Wanneer geen krachten werken op dat voorwerp is die kinetische energie behouden, dat wil zeggen, onveranderd in de tijd. Dat is niet langer zo als er een kracht werkt. Dan is

$$\Delta K = mv\Delta v = ma\, v\Delta t = F\Delta x$$

en we noemen $F\Delta x$ de geleverde arbeid. Het is gelijk aan de verandering in kinetische energie.

Nemen we nu opnieuw het voorbeeld van een massa aan een veer waarvoor de vergelijking van Newton kan geschreven worden als

$$ma = -\kappa\, x \tag{1.1.6}$$

Hier krijgen we ook te maken met potentiële energie $U(x)$, afhankelijk van de verplaatsing x van de massa en hier gelijk aan

$$U(x) = \frac{\kappa}{2}\, x^2$$

Voor een veer is de potentiële energie het grootst bij de grootste uitwijking; bij het loslaten heeft het dan de *potentie* of de mogelijkheid om te bewegen. Het is eenvoudig te verifiëren dat de totale energie, som van kinetische en potentiële energie behouden is:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\kappa}{2}\, x^2$$

De beweging zal dus zo gebeuren dat op elk moment de som van $mv^2(t)/2$ (waarin je de snelheid ziet) en van $\kappa x^2(t)/2$ (waarin je de verplaatsing ziet) voor elke tijd t gelijk blijft aan de initiële waarde. Kinetische energie kan tijdens de beweging omgezet worden in

potentiele energie en omgekeerd maar het totaal blijft behouden. Kennis nemen van invariante grootheden is natuurlijk een belangrijk middel om de beweging te begrijpen.

Het woord potentiële energie wijst op de mogelijkheid om arbeid te doen. We kunnen aan de massa trekken en op die manier de veer uitrekken. Als we een kracht F_e gebruiken om de massa een verplaatsing Δx te geven rond positie x, dan is geleverde arbeid gelijk aan $W = F_e \Delta x$. De benodigde kracht is $F_e = \kappa x$ zodat $W = \kappa \Delta(x^2)/2$, de verandering in potentiële energie die bij loslaten natuurlijk volledig kan omgezet worden in kinetische energie.

Anderzijds weten we wel uit ervaring dat dit niet blijft duren; er is wrijving. We kunnen ook spreken over de wrijvingskracht maar nu zal het systeem van veer en massa duidelijk energie verliezen. Die verandering in energie is de arbeid geleverd door de wrijving en waardoor energie naar de omgeving stroomt.

We besluiten dat de totale energie van een systeem een grootheid is die niet kan stijgen of dalen door een interactie tussen de delen van het systeem. Indien er een uitwendige kracht wordt uitgeoefend, wordt de energie verhoogd (verminderd) met de geleverde arbeid op (door) het systeem.

1.1.5

Atomisme

In het begin van volume I van de *Feynman Lectures on Physics* vinden we de volgende vraag: *wanneer in een cataclysme alle wetenschappelijke kennis vernietigd is en slechts één zin kan doorgegeven worden aan de volgende generatie wezens, wat zou dan de bewering zijn die het meeste informatie bevat met het minste aantal woorden?* Richard Feynman gelooft dat het de atoomhypothese is — *alles bestaat uit atomen, kleine deeltjes die eeuwig rondbewegen, elkaar aantrekken wanneer ze wat van elkaar verwijderd zijn en elkaar afstoten wanneer ze dichtbij komen.* Feynman verwijst hier naar de moleculair-atomistische opvatting van de natuur die inderdaad misschien het meest succesvolle beeld uit de hele na-

tuurwetenschappen geeft.

Het idee van atomen is nochtans heel erg oud. Het gaat terug op de oude Grieken, de zogenaamde atomisten Leukippos, Demokritos en (in mindere mate) Epicuros. We zijn dan in de periode 450-400 voor Christus.

De opvattingen van de atomisten zijn voor heel lange tijd grotendeels genegeerd. Reeds door Aristoteles werden ze gekenmerkt als louter materialisten (dat was een verwijt). Ze stelden namelijk dat ook de geest bestaat uit atomen. De atoomleer is pas weer opgedoken in onze contreien rond de tijd van de renaissance. Speciale vermelding verdient alleszins Pierre Gassendi, geboren in 1592, die het atomisme herintroduceerde in de moderne wetenschappen (en die de verenigbaarheid tussen de atomistische opvatting en de Christelijke leer heeft gepromoot). Vanaf die tijd werd de atoomhypothese een belangrijk werkkader voor wat we nu de scheikunde noemen. John Dalton, Joseph Gay-Lussac en Amedeo Avogadro hebben op die manier de poorten naar de moderne chemie geopend. Ook nog diep in de negentiende eeuw waren het vooral chemici die praktisch met het concept van atomen en moleculen bezig waren. Ik denk bijvoorbeeld (en niet toevallig zal later blijken) aan Jacobus H. van 't Hoff, nobelprijs scheikunde 1901. Hij gebruikte realistische modellen van atomen en moleculen om via de ruimtelijke structuur de eigenschappen van de stof te begrijpen. Hij was het ook die de analogie opmerkt tussen de moleculen of korreltjes in een oplossing en gasmoleculen. De moleculen van de oplossing vormen een soort "gas" waarvoor de ideale gaswet, waarover later meer, een formule oplevert voor de osmotische druk. Einstein bespreekt dat geval van osmose in de eerste paragraaf van zijn artikel over Brownse beweging.

Het discrete laat zich echter niet zomaar verzoenen met het continue, een thema waarvan we sporen zullen terugvinden bij Einstein. Die spanning tussen het continue en het discrete, tussen het reële en het ideale, tussen fysica en wiskunde leefde sterk bij de oude Grieken[2]. Veel paradoxen getuigen van de conceptuele strijd die

[2]Een belangwekkende discussie is te vinden in *Nature and the Greeks* van

gevoerd werd met het limietbegrip, het oneindige en met de overgang tussen een discrete en een continue beschrijving. Laat me hier de minder bekende paradox van Demokritos toevoegen. Demokritos was ook meetkundige. Hij bewees dat het volume van een piramide of een kegel gelijk is aan één derde van basis maal hoogte. Misschien was het naar aanleiding van dat bewijs dat hij op de volgende moeilijkheid stootte.

Stel dat een kegel in twee wordt gesneden door een vlak parallel aan de basis. Nu heb je twee stukken, een kleinere kegel en een kegel zonder top, die op elkaar gezet de oorspronkelijke kegel reconstrueren. Bekijk nu de twee cirkelvormige doorsnedes die voorheen elkaar nog raakten — is hun oppervlakte gelijk of niet? Als ze verschillend zijn en omdat de plaats van de snede willekeurig is, zou dat betekenen dat het oppervlak van de kegel niet erg glad kan zijn maar bezet met miniscule trapjes; is het dan wel een kegel? Aan de andere kant, als je zegt dat de twee cirkels een gelijke oppervlakte hebben, zouden dan niet van laag naar hoog, alle dergelijke cirkelsnedes van de kegel een gelijke oppervlakte hebben; en hebben we dan niet veeleer te maken met een cylinder?

Dat eenvoudige voorbeeld is aan verschillende kanten verwant met thema's en inzichten uit de natuurkunde. Eén van die thema's is het verzoenen van de corpusculaire natuur van de materie met continue beweging. De mechanica van Newton en de analyse hebben die vraag gedeeltelijk beantwoord. Daaraan gerelateerd is de verzoening van de atoomtheorie met een theorie waar de eigenschappen van de ruimte continu variëren. Daarmee komen we op het domein van de productie en transformatie van licht, het thema van de eerste publicatie van Einstein uit 1905 en expliciet daar vermeld in zijn eerste paragraaf.

In de handen van fysici als James Clerk Maxwell en Ludwig Boltzmann werd de combinatie van mechanica en atomisme op het einde van de 19de eeuw de basis van de kinetische gastheorie en de statistische mechanica[3]. Het citaat van Feynman aan het begin verwijst

Erwin Schrödinger, Cambridge University Press (1954).

[3]Er bestaat ook een mechanica van continue media en deze was zelfs pro-

naar de essentie van het project van die atomisten.

1.1.6

Kinetische gastheorie I

De synthese tussen mechanica en atomisme is meest vruchtbaar gebleken in de zogenaamde statistische mechanica. Het oudere woord dat nu nog voor een beperkter deel van die mechanica wordt gebruikt, is kinetische gastheorie.

Het woord druk roept in het dagelijkse leven mogelijks verschillende scenario's op. We kennen druk als een duwkracht, meer precies een kracht per oppervlakte-eenheid, maar we kennen druk ook in woorden als luchtdruk of in de druk van water als functie van de diepte. Als we denken aan gas of vloeistof als bestaande uit moleculen, kleinste deeltjes van de stof in kwestie, dan krijgen we de idee dat de druk van een gas in verband kan worden gebracht met de mechanische druk die de moleculen door botsingen uitoefenen op een wand van een container waarin het gas zich bevindt.

Wellicht de eerste overtuigende poging om de mechanica van deeltjes te verbinden met de macroscopische eigenschappen van de materie kwam voort uit het brein van Daniël Bernoulli. In 1738 geeft hij de start van de moderne kinetische gastheorie, in de woorden van Einstein *de parel aan de kroon van de mechanica.* We zullen terugkomen op deze theorie in 1.2.4 als we een beter begrip hebben gekregen van de onderwerpen van de thermodynamica (in 1.2). Hier kunnen we alvast beginnen met het voorbeeld van druk.

We beschouwen een cylindervormige container gevuld met gas. Het gas wordt bekeken als een collectie quasi-onafhankelijke deeltjes die botsen met de wanden. Bekijken we een wand met oppervlakte A. De botsingen op de wand oefenen een kracht uit. Dat veroorzaakt druk.

---

minent aanwezig in de 19de eeuwse fysica. Daarin ontbreekt grotendeels de atoomhypothese en vertrekt van een continuum van eigenschappen van de materie. Op die manier leek het trouwens veel beter aan te sluiten met de thermodynamica en het elektromagnetisme, waarover later meer.

Bij botsing met de wand keert de component van de snelheid loodrecht op de wand om van teken. Ik ga de snelheid noteren met de letter u. De verandering van deze snelheid is bij botsing gelijk aan de snelheid erna min de snelheid ervoor, dus

$$\Delta u = (-u) - (+u) = -2u \tag{1.1.7}$$

waarbij we de snelheid u positief nemen als het deeltje de cylinder nadert. Enkel die component van de snelheid, loodrecht op de wand, brengt de deeltjes naar de wand.

De kracht die wordt uitgeoefend op de wand is minus de kracht die de deeltjes ondervinden (anders zou de wand gaan bewegen). Dus is volgens de wet van Newton de druk op de wand

$$P = -\frac{Nm}{A}\,\frac{\Delta u}{\Delta t} \tag{1.1.8}$$

waar N het totaal aantal deeltjes is met massa m.

We moeten het nog hebben over het tijdsinterval Δt. We zullen hier niet te diep nadenken. Wel, als de snelheid u is en de lengte van de cylinder is ℓ, dan zal die tijd Δt zo zijn dat er 1 botsing is per heen-en-weer beweging, dus

$$\Delta t = \frac{2\ell}{u}$$

De combinatie van (1.1.7) en (1.1.8) geeft de druk op de wand; voor onze doos met volume $V = \ell A$

$$P = \frac{N}{V}\,mu^2$$

Onthou echter dat u verwijst naar de snelheid in 1 richting. Onze u^2 is dus, als alles isotroop ondersteld wordt, gelijk aan een derde van v^2. Er zijn immers drie richtingen voor de snelheid v. Natuurlijk zullen bovendien niet alle deeltjes dezelfde snelheid hebben. We moeten op één of andere manier denken aan een gemiddelde. We besluiten dan

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} m\langle v^2\rangle\,\frac{N}{V} \tag{1.1.9}$$

waar $m\langle v^2\rangle/2$ de gemiddelde (kinetische) energie voorstelt, zie (1.1.5), en N/V is de gasdichtheid.

Ik ben hierboven wat schematisch geweest in de afleiding. Dat is nog niet zo erg voor de argumentatie van de bijhorende formules maar er is één belangrijk ingrediënt dat ik ten onrechte heb vermeden. De Grieken zouden het de plaats noemen waar Zeus Lotje ontmoet, waar de almachtige wethouder toch rekening moet houden met het toeval.

Bedenk bijvoorbeeld dat mogelijks alle deeltjes kunnen bewegen in een richting parallel met de wand in kwestie. Dan zouden ze nooit met die wand botsen. Of denk aan een reëel gas waar de deeltjes wel botsen doch door één of andere "samenzwering" , dat is een heel speciale configuratie, het lukt dat slechts heel uitzonderlijk een deeltje tegen de wand botst. Denk tenslotte aan de zin die bovenstaande beschrijving heeft voor heel weinig deeltjes. De mechanische druk zou enorm variabel zijn in de tijd en we zouden moeite hebben om over *de* druk te spreken als functie van *de* energie van het gas.

Die beschouwingen herinneren ons aan het belang van tellen. Er komen namelijk twee gerelateerde noties in zicht: statistische beschouwingen en de notie van *typische* beginvoorwaarden. Dat begin- en randvoorwaarden belangrijk zijn, is duidelijk — zonder hen kunnen we de vergelijkingen van de mechanica niet oplossen. Hier komt echter nog iets bij. Als je een systeem hebt met heel veel vrijheidsgraden (deeltjes) en de toestanden (van posities en snelheden voor een gegeven beginenergie) zijn *a priori* equivalent, dan kan je door te tellen nagaan welke manifeste condities (zoals de druk) typisch zullen voorkomen. Je kan spreken over wat waarschijnlijk is en in geval van heel veel deeltjes krijgt één bepaald gedrag alle kans.

Een standaardvoorbeeld mag dat illustreren. Als je een muntstuk opgooit, kan het "kop" of "munt" zijn. Doe je dat een aantal keren, dan lijkt het wel een willekeurige rij van "kop" en "munt." Kijken we echter naar een gemiddelde: de fractie "kop" na n keer gooien. We merken dat als n zeer groot wordt, deze fractie dichter

en dichter een half benadert. Wat voor een individuele worp een louter toevalsexperiment leek, is voor de macroscopische grootheid (de fractie van “kop”-worpen) een vaste waarde geworden. Dat zijn kanstheoretische argumenten en de moderne fysica, de kwantum- en de statistische mechanica zijn voor een belangrijk gedeelte afnemers geworden van de kanstheorie.

De eerste persoon die het idee had om kanstheorie toe te passen in de fysica was net Daniël Bernoulli. Hij deed dat in een artikel over de inclinatie van planeetbanen ten opzichte van de ekliptiek. De kans dat al die inclinatiehoeken kleiner zijn dan 9 graden is zo klein dat Daniël daaruit afleidde dat dit fenomeen een oorzaak moet hebben. Deze conceptuele doorbraak en die manier van redeneren zal een grote invloed hebben op Pierre Simon de Laplace die dat zal hernemen vanaf zijn eerste werken. Daniël Bernoulli past ook die eerste statistische beschouwingen toe op het gasmodel van hierboven. Dat idee werd verder onafhankelijk herontdekt door John Waterston en door August Krönig, terwijl Maxwell en in zijn spoor Boltzmann de draad van Bernoulli terug opnemen. Boltzmann zal natuurlijk een allerbelangrijkste bijdrage geven in de statistische interpretatie van thermodynamische entropie en daarover zal 1.2.4 uitwijden. Voor het eerst komt een statistische wet de fysica binnen; *een morele zekerheid* zal Maxwell schrijven, die op die manier een andere Bernoulli herhaalt, Jacob Bernoulli en schrijver van de *Kunst van het Raden*, de *Ars Conjectandi* uit 1713.

1.2 Thermodynamica

Het belangrijkste thema van de thermodynamica is de studie van transformaties van warmte in mechanische arbeid en de omgekeerde transformaties van arbeid in warmte. De industriële revolutie werd vanzelfsprekend in belangrijke mate gestimuleerd door de systematische ontwikkeling van deze vraagstukken. Energieomzettingen, warmte en verlies (of dissipatie) speelden daarin een voorname rol. Voor de 19de eeuw denken we aan stoommachines maar het bleef belangrijk bij de invoering van elektrische lampen en “machi-

nes" aan het einde van de 19de eeuw. William Thomson (de latere Lord Kelvin) gebruikte voor het eerst het woord *thermodynamic* in een artikel uit 1849 over de efficiëntie van stoommachines, een onderwerp dat goed was gestart in 1824 met het werk van Sadi Carnot.

Slechts rond het midden van de 19de eeuw beseften fysici dat warmte een vorm is van energie en we weten nu dat de basis voor deze identificatie te vinden is in de kinetische gastheorie die alle thermische fenomenen reduceert tot de wanordelijke beweging van atomen en moleculen. Daarover komt meer in 1.2.4. De benadering in de thermodynamica is echter anders. Hier is het niet de mechanica die het vertrekpunt vormt maar wel een aantal principes, postulaten of hoofdwetten die gebaseerd zijn op experimentele evidentie. In 1878 definieert Maxwell thermodynamica als

het onderzoek van de dynamische en thermische eigenschappen van lichamen, als volledig afgeleid uit de Eerste en de Tweede Hoofdwet van de thermodynamica, zonder hypotheses over de moleculaire samenstelling van de lichamen.

Heden ten dage kan dat dikwijls onbevredigend overkomen omdat we getraind worden in het onderzoek *hoe dingen echt werken.* De procedure van de thermodynamica heeft echter ook enorme voordelen. Het is vooral werkbaar — de thermodynamica heeft het voordeel voor een groot deel onafhankelijk te zijn van vereenvoudigingen die we meestal moeten opleggen aan onze (statistisch) mechanische berekeningen. Thermodynamische argumenten vinden we dan ook in alle natuurwetenschappen. Het is opmerkelijk hoe studenten er dikwijls vlug mee leren werken, meestal door standaard-voorbeelden te imiteren, zonder echt begrip van de microscopische inhoud van de vele thermodynamische relaties. Einstein was alleszins zeer onder de indruk van het programma van de thermodynamica. In zijn autobiografische nota's schrijft hij:

Een theorie is des te meer indrukwekkend naarmate de eenvoud van haar veronderstellingen, hoe meer verschillende soorten dingen met elkaar verbonden worden en hoe breder het toepassingsgebied. Vandaar de diepe indruk die klassieke thermodynamica op mij maakte. Het is de enige fysische theorie van universele inhoud die, naar ik

overtuigd ben, nooit zal worden verworpen.

Ik zal erop terugkomen hoe de statistische thermodynamica de belangrijkste leiddraad was in alle publicaties van 1905.

1.2.1

Thermodynamische systemen en toestanden

In de mechanica is een toestand volledig beschreven op een bepaald ogenblik als je voor alle massa's de posities en de snelheden geeft. Natuurlijk, als het systeem enorm veel deeltjes bevat, is de beschrijving van die *micro-toestand* geen gemakkelijke taak. Bovendien lijkt het meestal onnodig om al die specificaties te geven als we enkel geïnteresseerd zijn in *gemiddelde* grootheden. Er zijn nu immers verschillende schalen van beschrijving. Verkeersinformatie speelt zich ook niet af op het niveau van de individuele auto's maar zal bijvoorbeeld eerder spreken over de lengte of het gebied van files, of over de zichtbaarheid op de weg. Dat is ook het geval bij verscheidene wetenschapsdomeinen. We kunnen heel ver komen in de studie van biologie of van scheikunde zonder fysica te studeren. Er ontwikkelt zich zelfs een eigen jargon en het lijkt soms alsof er autonome wetmatigheden kunnen geformuleerd worden. Dat gaat natuurlijk niet vanzelf. Het is niet omdat wij een bepaalde beschrijving verkiezen en bepaalde grootheden prefereren dat de beschrijving intern consistent is. Het is zelfs eerder verwonderlijk dat autonome wetten op een ruwere schaal kunnen bestaan. Het is dikwijls via een lange geschiedenis van observaties, ervaring en experimenten dat de relevante en werkende schaal van beschrijving wordt ontdekt. In thermodynamica is het niet anders. Dat thermodynamica *werkt* is dan te verklaren via theoretische inzichten en conceptuele doorbraken. Hoe kan autonoom macroscopisch gedrag worden afgeleid uit de complexiteit van de microscopische wereld? Deze vraag is hier echter niet aan de orde.

De thermodynamische toestand of *macro-toestand* van een systeem gebruikt veel minder grootheden. Nemen we het voorbeeld van een homogeen gas of een homogene vloeistof. We kunnen met een thermometer de temperatuur meten en met een soort barometer

kunnen we de druk meten. Meestal zijn de macroscopische eigenschappen niet afhankelijk van de preciese vorm van het recipiënt maar enkel van het volume. We hebben dan drie veranderlijken: temperatuur T, druk P en volume V. Deze zijn niet onafhankelijk. Eén gram lucht in een fles van één liter op kamertemperatuur heeft een welbepaalde druk. Die afhankelijkheden kan je in een relatie stoppen, van de vorm

$$f(P, V, T) = 0$$

en dat wordt een toestandsvergelijking genoemd. Die relatie hangt natuurlijk af van de eigenschappen van het fluidum. Welgekend is de toestandsvergelijking

$$PV = RT \tag{1.2.1}$$

voor één mol van een gas waar de temperatuur wordt uitgedrukt in de schaal van Kelvin, de zogenaamde absolute temperatuur. Kamertemperatuur komt ongeveer overeen met 300 K. Meer algemeen moet je 273.15 bij de aflezing van een Celsius-thermometer tellen om de temperatuur in kelvin uit te drukken. Het symbool R in (1.2.1) staat voor de universele gasconstante en is ook weer verbonden met wat we bedoelen met 1 mol gas. Het woord mol voor een bepaalde hoeveelheid stof werd eigenlijk pas in 1900 door Wilhelm Ostwald gelanceerd. Het is een onderwerp voor Einstein uit 1905 te bepalen hoeveel deeltjes gas er in 1 mol zitten. We kunnen nu zeggen dat 1 mol van een substantie overeenkomt met $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ deeltjes. Dat getal N_A is de constante van Avogrado en is verbonden met R door de constante van Boltzmann, genoteerd k_B:

$$R = N_A\, k_B, \quad k_B = 1.381 \times 10^{-23}\, \frac{kg\, m^2}{s^2 K} \tag{1.2.2}$$

We wijken af maar merk hier al op hoe sterk (1.2.1) gelijkt op de uitdrukking (1.1.9).

We moeten terug naar (1.2.1). Deze vergelijking is slechts benaderend correct maar doet het goed voor verdunde gassen. Het is goed om te weten dat die ideale gaswet empirisch is ontstaan. Rond 1660

al waren het Robert Boyle, Henry Power en Richard Towneley die vonden dat het product PV constant blijft als je lucht samendrukt bij vaste temperatuur. Gay-Lussac, en dan zijn we in Frankrijk rond 1805, toonde dat bij vaste druk het volume recht evenredig is met de temperatuur. Avogadro voegde er iets later aan toe dat gelijke volumes gas, bij vaste druk en temperatuur, ook een gelijk aantal deeltjes bevatten. Dat alles is af te lezen uit de samenvatting (1.2.1).

Zijn er meerdere stoffen in een gasmengsel, dan zullen naast volume en temperatuur natuurlijk ook de concentraties van de stoffen een rol spelen. Wanneer we een vaste stof beschouwen, is er niet alleen temperatuur en volume maar kunnen er verschillende drukken zijn naargelang de richting. Er kunnen ook spanningen of vervormingen zijn waar we rekening mee wensen te houden. Tenslotte kan het ook gebeuren dat ons systeem bewegende delen heeft en zullen de posities en snelheden van die delen ook moeten toegevoegd worden aan de thermodynamische beschrijving.

Er kunnen nu transformaties optreden waarin die grootheden *in tussentijd* ofwel niet kunnen bepaald worden ofwel gewoon veranderen volgens bepaalde *thermodynamische* trajecten. Het kan ondertussen gebeuren dat het systeem arbeid uitoefent op de omgeving of omgekeerd. We denken bijvoorbeeld aan een gas in een cylinder waarvan één wand bestaat uit een beweegbare zuiger. Als er een druk P is en de wand heeft een oppervlakte A die verschoven wordt over een afstand Δx, dan is de arbeid W, gelijk aan kracht PA maal verplaatsing Δx gelijk aan

$$W = P\,\Delta V, \quad \Delta V = A\Delta x \tag{1.2.3}$$

In combinatie met de toestandsvergelijking zal die uitdrukking een formule geven voor de geleverde arbeid. Bij een isotherme (gelijke temperatuur) expansie van een gas, kunnen we in (1.2.3) de druk P vervangen door $P = RT/V$ en krijgen we

$$W = RT\frac{\Delta V}{V} = RT\Delta(\log V) \tag{1.2.4}$$

De arbeid geleverd door het systeem (1 mol gas) in de expansie van een volume V_1 naar een volume V_2 is dus $W = RT\log(V_2/V_1)$.

Tenslotte, evenwicht. Thermodynamisch evenwicht refereert naar een thermodynamische toestand die niet (langer) in de tijd varieert en waarvoor de thermodynamische grootheden goed gedefinieerd zijn. Evenwicht is ook stabiel: na kleine storingen keert het systeem terug naar de evenwichtstoestand.

1.2.2

De eerste wet van de thermodynamica

In de mechanica en reeds in een bepaalde versie in het werk van Newton en Leibniz, is er behoud van energie: kinetische (of bewegings-) energie kan overgaan in potentiële energie. Denk aan een slinger die van hoog naar laag valt en daarin zijn snelheid vermeerdert, en omgekeerd. We hebben ons daarover reeds gebogen in 1.1.4.

De eerste wet van de thermodynamica is een uitdrukking van behoud van energie voor thermodynamische systemen. De verandering van energie in een systeem gedurende een transformatie is gelijk aan de hoeveelheid energie die het systeem van de omgeving krijgt. We gaan uit van het postulaat: als de energie van een systeem verandert, dan moet via één of ander mechanisme energie van buiten naar binnen of van binnen naar buiten gekomen zijn.

In thermodynamica classificeren we de mechanismen gewoonlijk in twee categorieën: arbeid en warmte. Warmte is een spontane energiestroom tussen lichamen die op verschillende temperatuur zijn. Arbeid is niet automatisch of spontaan; je hebt er meestal een externe bron voor nodig. Misschien juist daardoor is het concept warmte het meest moeilijke. Uit het dagelijks leven komt gauw de verwarring met temperatuur en met het adjectief warm. In de thermodynamica is warmte altijd *in beweging.* Je spreekt niet over de warmte van een systeem, wel over de energie. Net als arbeid draagt warmte energie over.

De eerste hoofdwet zal nu gewoon de balans maken van de energie in termen van arbeid en warmte. Dat is, de inwendige energie van een materiaal (gas, vloeistof,...) kan op verschillende manie-

ren veranderen: bijvoorbeeld door het systeem op te warmen (of af te koelen), of door het systeem arbeid te laten verrichten op de omgeving.

Deze koele formulering verbergt zowel het conceptuele als het experimentele werk in het midden van de 19de eeuw waarin men stilaan tot de conclusie kwam dat warmte en arbeid in elkaar om te zetten zijn. Dat was vooral het werk van Robert Mayer (1842), James Prescott Joule (1843) en van Hermann von Helmholtz (1847).

Beschouwen we een bad water. We wensen de temperatuur ervan te verhogen. Uit experimenten hebben we geleerd dat er zeker twee verschillende manieren zijn. We kunnen ten eerste een vuurtje maken en het water ermee verwarmen. De uitgeoefende arbeid is praktisch nihil. We hebben alleen het water in contact gebracht met de hete vlammen en het volume van het water is zeer weinig veranderd. Een tweede manier bestaat erin draaiende schroeven te plaatsen in het bad en de temperatuur te doen stijgen via wrijving. Zo lang de peddels draaien, verhoogt de temperatuur van het water. Daarvoor moeten we wel arbeid uitoefenen. Overeenkomstig is er een grote hoeveelheid negatieve arbeid uitgeoefend door het water dat de beweging van de peddels tegenwerkt. Ook al zijn begin- en eindtoestand van het water dezelfde in beide scenario's, de arbeid die het systeem heeft uitgeoefend, is dat niet. We zeggen dat arbeid pad-afhankelijk is[4]. We willen echter wel verderwerken met het principe van behoud van energie.

We komen zo bij de equivalentie van mechanische arbeid en warmte. Wanneer een systeem thermisch geïsoleerd is, krijgen we net als in mechanica

$$\Delta E + W = 0$$

waarin W de arbeid is die het systeem levert. Als warmte kan stromen (denk aan het installeren van een temperatuurverschil buiten en binnen het systeem), veranderen we dat in het meer algemene

$$\Delta E + W = Q \tag{1.2.5}$$

[4] of dus afhankelijk van de manier waarop het systeem van de ene thermodynamische toestand naar een andere gaat.

waar Q staat voor warmte, energie die het systeem krijgt in vormen anders dan arbeid. Dat is de eerste wet van de thermodynamica.

1.2.3

De tweede wet van de thermodynamica

De eerste wet zegt ons dat we geen machine kunnen maken die energie produceert. Deze wet stelt echter geen grenzen aan de mogelijkheid om één vorm van energie in een andere vorm te transformeren. We kunnen bijvoorbeeld nog dromen over de totale omzetting van warmte in arbeid zonder andere gevolgen. We zouden dan de omgeving koelen en arbeid leveren en zo zou onze machine nooit uitgeput geraken. Edoch, de tweede wet van de thermodynamica sluit de mogelijkheid uit om zo een *perpetuum mobile* te maken. Sinds de verdrijving uit de tuin van Eden is het een experimenteel feit dat we zullen werken in het zweet onzes aanschijns.

Het is natuurlijk heel belangrijk voor de efficiëntie van een machine om uit te maken welke transformaties mogelijk zijn. In het begin van de 19de eeuw volgt Sadi Carnot zijn vader Lazare op in meditaties over perfecte machines en efficiëntie. Deze abstractie, want dat was het, leidt Sadi Carnot tot het bedenken van een veralgemeende warmtemotor die warmte aan een bron onttrekt en arbeid levert. Om continu te opereren heeft de motor ook een koud reservoir nodig waarin warmte wordt gedumpt. Elke motor werkt eigenlijk tussen minstens twee verschillende temperaturen T_1 en T_2.

Het nieuwe idee van Carnot bestond erin te denken aan een *reversibele* machine, één die in de omgekeerde richting kan lopen, terug naar de begintoestand. Hij realiseerde zich dat geen enkele warmtemotor meer efficiënt kan zijn dan een reversibele die tussen dezelfde temperaturen werkt. Deze pure gedachten (*Réflexions sur la puissance motrices du feu*, 1824) impliceren praktisch bruikbare inzichten; we hoeven ons bijvoorbeeld niet langer af te vragen of misschien reservoirs met een andere vloeistof dan water de machine beter zouden doen werken.

Er bleef echter plaats voor theoretische verbeteringen. Bijvoor-

beeld, het bleek dat de maximale efficiëntie een universele functie is van de temperatuur. Door de redenering om te draaien, kunnen we temperatuur definiëren op een absolute schaal die onafhankelijk is van de gebruikte stof. Dat is de absolute temperatuur T die we al eerder gebruikten, zie b.v. in (1.2.1). Bovendien voegden Kelvin en Joule daar hun inzichten bij over de eerste wet van de thermodynamica. Warmte en arbeid, grootheden die vanzelf verschijnen in efficiëntierelaties, kunnen nu in dezelfde fysische eenheden (energie) worden geschreven en het principe van Carnot wordt

$$\frac{J_1}{T_1} + \frac{J_2}{T_2} \geq 0$$

waar $J_1(J_2)$ de warmte is door de motor gegeven aan het eerste (tweede) reservoir op temperatuur $T_1(T_2)$. De uitbreiding naar meerdere reservoirs werd gegeven door Kelvin in 1854 en door Rudolf Clausius voor een continu proces (sommen worden integralen):

$$\oint \frac{dJ}{T} \geq 0 \tag{1.2.6}$$

Het linkerlid is een "continue som" over "infinitesimale" bijdrages. We verbeelden een kring of cyclisch proces waar de machine contact maakt met reservoirs bij temperatuur T en daarin een energie dJ stort. Indien het proces reversibel is, treedt de gelijkheid op in (1.2.6) en is T ook de (ogenblikkelijke) temperatuur van het systeem: Dan is

$$\oint \frac{dJ}{T} = 0$$

voor elk kringproces en dus is voor een reversibel pad langs evenwichtstoestanden, de integraal

$$\int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{dJ}{T} = S(\alpha') - S(\alpha) \tag{1.2.7}$$

onafhankelijk van het gevolgde pad en enkel afhankelijk van begin- en eindtoestand. Op die manier ontdekt Clausius in 1865 een nieuwe functie van de thermodynamische toestand. Hij noemt S de entropie, naar het Griekse $\tau\rho o\pi\eta$, draaipunt of omkeer.

Als onmiddellijk gevolg van (1.2.6)–(1.2.7), door de cyclus te sluiten, krijgen we

$$\int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{dJ}{T} \geq S(\alpha') - S(\alpha) \tag{1.2.8}$$

voor elk pad tussen de thermodynamische toestanden α' en α van het systeem waarin aan het reservoir bij temperatuur T telkens een energie dJ wordt afgegeven (de warmte). De linkerzijde van (1.2.8) is de totale warmte die in de reservoirs wordt gedissipeerd. De tweede wet van de thermodynamica wordt zodoende samengevat in de ongelijkheid

$$Q \geq T\,\Delta S$$

met Q als in (1.2.5). Gelijkheid geldt voor reversibele processen. De theoretisch meest bekende formulering gaat echter volledig in termen van entropie. Net als hierboven in (1.2.7) kan men argumenteren dat het linkerlid van (1.2.8) gelijk is aan de entropiestijging in de omgeving. Zetten we alles aan dezelfde kant van de vergelijking, dan krijgen we

$$S_{\text{tot}}(\text{einde}) - S_{\text{tot}}(\text{start}) \geq 0 \tag{1.2.9}$$

dat de totale entropie van het universum, reservoirs plus systeem, stijgt. Zoals Clausius schrijft, *De entropie van de wereld streeft naar een maximum.* Dat is de tweede hoofwet.

In 1928 omschrijft de astronoom en kosmoloog Arthur Eddington het belang van deze wet:

De wet dat entropie altijd stijgt —- de tweede wet van de thermodynamica — neemt, denk ik, de hoogste plaats in tussen de natuurwetten. Als iemand je erop wijst dat je eigen theorie over het universum in tegenspraak is met de wetten van Maxwell — dan, des te slechter voor de vergelijkingen van Maxwell. Als het in tegenspraak bevonden wordt met observatie — wel, experimentatoren maken er soms een zootje van. Maar als je theorie in conflict komt met de tweede wet van de thermodynamica kan ik je geen hoop geven; niets anders dan te vervallen in diepste vernedering is het lot van je theorie.

Een meer praktische versie van de 2de wet kan omschreven worden door de uitspraak dat er geen proces bestaat waarvan het enige

resultaat is dat er warmte stroomt van een koud naar een warm reservoir. Meer populair kan men zeggen dat de natuur zo werkt dat de totale "wanorde" enkel kan toenemen. Het is de "drang" naar evenwicht. In termen van de werking van machines kan men zeggen dat ook al is de energie principieel behouden, toch is de *bruikbare* energie altijd aan het afnemen. Er is nooit een energiecrisis; energie is behouden en is in overvloed aanwezig in zeeën en luchtmassa's. Wat echt bedoeld wordt, is dat "edeler" vormen van energie, deze met lage entropie, in verschillende betekenissen onbereikbaar of duurder worden. Energie degenereert en wordt niet langer bruikbaar om arbeid te leveren. Het wordt inzichtelijker als we naar de statistische interpretatie van evenwicht zullen kijken. Dat komt in de volgende paragraaf.

De gelijkheid (1.2.7) is de operationele definitie van entropie. We hoeven ons echter niet alleen tot thermische uitwisselingen te beperken. Hebben we, zeg, een gas opgesloten in een volume V bij druk P en bij energie E en temperatuur T, en we maken een kleine "verplaatsing" naar een nieuw evenwicht over ΔE en ΔV, dan is de reversibele verandering van de entropie $S(E, V)$ nog steeds gelijk aan

$$\Delta S = \frac{1}{T}Q = \frac{1}{T}(\Delta E + W) = \frac{1}{T}(\Delta E + P\,\Delta V) \qquad (1.2.10)$$

waarin T de (absolute) temperatuur is en P is de druk. Daarvan zullen we in het vervolg enkel nodig hebben dat voor $\Delta V = 0$

$$\frac{\Delta E}{\Delta S} = T \qquad (1.2.11)$$

1.2.4

Kinetische gastheorie II

Is het mogelijk om warmtefenomenen te verklaren in termen van bewegende deeltjes die onderling interageren? Het behoud van energie was al eerder begrepen uit puur mechanische overwegingen maar dat warmte ook beweging zou zijn, stelde een aantal fundamentele conceptuele problemen. Er is echter ook veel te winnen:

het onderscheid tussen temperatuur, warmte en entropie, en vooral, wat entropie eigenlijk is.

Beschouwen we een gesloten container gevuld met een zekere hoeveelheid gas, bijvoorbeeld lucht, bij zekere temperatuur. Als we het opwarmen, vergroten we de energie en de vraag is hoe die warmte verbonden is met beweging. Als de fundamentele basis van de natuurkunde in termen van de mechanica kan gesteld worden, moet zo een mechanische of dynamische warmtetheorie mogelijk zijn. Dat is het onderwerp van de kinetische gastheorie en, meer algemeen, van de statistische mechanica (maar dat woord was nog niet in voege),[5] zoals vooral ontwikkeld door Maxwell en Boltzmann en wel in de tweede helft van de 19de eeuw.

Volgens die theorie betekent verwarmen van ons gas een grotere gemiddelde kinetische energie creëren van de gasmoleculen. Dat wil zeggen dat de gemiddelde snelheid van de botsende gasmoleculen groter wordt. We hebben dat reeds ingeleid onder 1.1.6 bij het model van Daniël Bernoulli.

We kijken terug naar (1.1.9) en vergelijken met (1.2.1). Zowel de kinetische gastheorie als de ideale gaswet leveren uitdrukkingen voor de druk, die vanzelfsprekend numeriek gelijk moeten zijn. We krijgen dus

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T \tag{1.2.12}$$

of de gemiddelde kinetische energie van een gasmolecule (omwille van verplaatsingen) is gelijk aan $3k_BT/2$, onafhankelijk van het soort gas. We komen tot het besluit dat de temperatuur een maat is voor de kinetische energie. Of omgekeerd, de hevigheid van de beweging wordt door de temperatuur aangegeven. Indien we de evenredigheidsfactoren ernstig nemen, komen we tot snelheden voor luchtdeeltjes van enkele honderden meter per seconde bij normale temperaturen. Op dezelfde "kinetische" manier spreken we over druk en dichtheid van het gas. Het zijn macroscopische grootheden die een mechanische basis hebben en functie zijn van de

[5] Einstein gebruikt de uitdrukking *molekularkinetische Theorie der Wärme.*

microscopische realisatie.

In 1899 na een grondige studie van de werken van Boltzmann over de kinetische gastheorie, schreef Einstein:

Ik ben sterk overtuigd van de correctheid van de principes van de theorie. Dat is: ik ben overtuigd dat het in het geval van gassen werkelijk een kwestie is van beweging van discrete massapunten met een vaste bepaalde grootte, die zich volgens bepaalde condities bewegen... Het is een stap voorwaarts in de dynamische verklaring van fysische fenomenen.

Er zijn andere meer gedetailleerde behandelingen van deeltjessystemen waarvoor de wetten van de thermodynamica kunnen afgeleid worden en de eerste systematische behandeling is toe te schrijven aan Joshua Gibbs, de eerste Amerikaan in ons verhaal. Ook Einstein kwijt zich van die taak in publicaties uit 1902, 1903 en 1904. Hij merkt later in 1911 op dat, afgezien van enkele punten, hij de publicaties van 1902–1904 over de fundamenten van de statistische fysica niet zou hebben gepleegd, had hij geweten van het boek *Elementary Principles of Statistical Mechanics* uit 1902 van Gibbs. Nochtans vormen ze een belangrijk deel van de kern van gedachten die hem leidden naar het werk in 1905. Verder nog, zijn levenslange interesse in de statistische gronden van de thermodynamica, hebben een prominente rol gespeeld in heel zijn latere denken.

Die overgang van kinetische gastheorie naar statistische mechanica speelt zich voornamelijk af in de ontwikkeling van de zogenaamde ensembletheorie. Ensembles komen overeen met verschillende fysische scenario's. Of je het systeem volledig isoleert van de omgeving of laat thermisch interageren met een warmtebad, of je het aantal deeltjes fixeert of ook uitwisseling van deeltjes wil beschouwen, deze keuzes impliceren andere ensembles. Er zijn echter overgangen mogelijk tussen ensembles en het kan mathematisch veel eleganter zijn om in het ene dan wel in het andere ensemble te werken.

Kanstheorie wordt ook veel prominenter aanwezig in de statistische mechanica. Men gaat rekenen met kansverdelingen op de ruimte van alle mogelijke posities en impulsen van de deeltjes. Ik geef een

voorbeeld.

De snelheden van de moleculen in een verdund gas hebben een statistische verdeling. Bij evenwicht met een warmtebad op temperatuur T is de kans dat een molecule een snelheid omtrent grootte $v \pm dv$ heeft, gegeven door

$$\rho(v)\,dv = \big(\frac{m}{2\pi k_B T}\big)^{3/2}\, 4\pi v^2\, \exp[-mv^2/2k_B T]\,dv \qquad (1.2.13)$$

Dat is de Maxwell-verdeling. Het is daaruit af te leiden dat de "meest waarschijnlijke" snelheid van een molecule gelijk is aan $\sqrt{2k_B T/m}$. We kunnen ook direct de gemiddelde kinetische energie berekenen, zoals het verscheen in (1.1.9), via

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{+\infty} v^2\, \rho(v) dv = \frac{3k_B T}{m}$$

en we vinden zonder moeite de identificatie (1.2.12) terug. De *reden* voor de Maxwell-verdeling (1.2.13) is statistisch (en empirisch geverifieerd) als de uitbreiding van de uniforme verdeling over alle mogelijke snelheden op een oppervlak van constante energie E, naar een evenwichtssituatie waar de energie kan fluctueren rond een gemiddelde $E = 3Nk_B T/2$. Ik laat de details aan de tekstboeken.

Een andere toepassing van statistische mechanica was de formulering en de uitbreiding tot diverse ensembles van het zogenaamde equipartitiebeginsel. Einstein, in het bijzonder in de jaren net voor 1905, heeft daartoe bijgedragen. De basisvraag is hier hoeveel energie je moet voorzien per vrijheidsgraad in een systeem. De vuistregel is dat elke vrijheidsgraad telt voor een energie gelijk aan $k_B T/2$.

We kunnen dat weer verifiëren voor het ideaal gas. Er zijn 3 vrijheidsgraden per deeltje wat betreft de translatiebeweging; het deeltje beweegt vrij in drie dimensies. Daarom is de bijhorende energie gelijk aan $3N \times k_B T/2$. Dat komt overeen met de kinetische energie die we net hebben berekend, of zie (1.2.12). Is het deeltje een molecule met verschillende atomen die ten opzichte van elkaar kunnen vibreren of roteren, dan kan je denken dat er per vrijheidsgraad

gewoon $k_B T/2$ bijkomt.

Nu we enig idee hebben gekregen over de microscopisch-dynamische inhoud van woorden als temperatuur en druk moeten we nog zeker één harde noot kraken: wat is entropie? Er zijn vele soorten entropie en vele gebruiken. Wij houden ons hier bezig met de configurationele entropie. Omdat die vooral verbonden is met de namen van Boltzmann, Planck en Einstein wordt ze dikwijls ook naar hen genoemd. We zullen ze blijven noteren met S. Om deze entropie te verkrijgen wordt er geteld hoeveel (micro-)toestanden compatibel zijn met de *manifeste conditie,* de thermodynamische toestand. Herinner dat de thermodynamische toestand van een systeem met een groot aantal micro-toestanden of configuraties correspondeert. Hier is een speelgoed-voorbeeld.

Stel dat we N *spins* of pijltjes hebben die elk "op" of "neer" kunnen zijn. Dat is niet het startpunt van de mechanica maar we willen enkel de idee uitdrukken. De verzameling van alle micro-toestanden bestaat hier uit alle rijen $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ waarin elke spin σ_i de waarden "op" of "neer" kan aannemen. Je kan ook denken aan N muntstukken die elk ofwel "kop" ofwel "munt" tonen.

Het aantal mogelijke micro-toestanden is dus gauw berekend, het is 2^N. Bekijken we nu de macro-grootheid m_N die aan elke micro-toestand σ een getal $m_N(\sigma) = m_N(\sigma_1, ..., \sigma_N)$ associeert, gedefinieerd als het totaal aantal spins in de configuratie die "op" zijn. Deze m_N kan de waarden $0, 1, 2, \ldots, N$ aannemen. Als $m_N = 0$ of $m_N = N$ is er slechts 1 (micro-) configuratie die daarmee verenigbaar is: allemaal "neer," respectievelijk allemaal "op". Meer algemeen zitten er

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}}(\Updownarrow) = \frac{\mathcal{N}(\mathcal{N} - \infty) \ldots (\mathcal{N} - \Updownarrow + \infty)}{\Updownarrow(\Updownarrow - \infty) \ldots \infty}$$

micro-toestanden in de verzameling $\{(\sigma_1, ..., \sigma_N) : m_N(x) = m\}$ verenigbaar met m "op" spins. Die $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}(\Updownarrow)$ is het aantal combinaties of groepjes van m elementen die je kan maken uit een verzameling van N elementen. De compatibele configuraties, dat zijn hier deze met m "op" spins, verschillen door de plaatsen in de

N-rij waarop die "op" spins precies zitten. We schrijven

$$S(m) = k_B \log \mathcal{W}_N(\Updownarrow)$$

voor de (configurationele) entropie horende bij de macro-toestand $m_N = m$.

Denken we vervolgens aan een experiment waarbij we 100 keer een teerling opgooien. Vanuit microscopisch oogpunt zijn alle realisaties evenwaardig. De kans om 100 keer een 6 te gooien is gelijk aan de kans op elke andere rij van ogen. Vanuit macroscopisch oogpunt zijn ze echter niet evenwaardig. Er zijn veel meer realisaties waarvoor de totale som van de ogen gelijk is aan 350 dan dat er realisaties zijn waarvoor de som van de ogen gelijk is aan 150. De realisatie van 100 keer een 6 gooien is niet speciaal als microscopische realisatie behalve door het feit dat de macroscopische waarde (totale som van ogen = 600) heel speciaal is en slechts op 1 manier kan verwezenlijkt worden. De entropie ziet nu hoe typisch een microtoestand is vanuit zo een macroscopisch gezichtspunt.

In zekere zin meet entropie dus de wanorde: als er veel meer micro-realisaties zijn met dezelfde macro-waarde dan kunnen we de macro-toestand inderdaad wanordelijk noemen. Er zijn veel meer manieren om je tafel wanordelijk dan wel op orde te krijgen. Evenwicht correspondeert dan met de toestand van grootst mogelijke wanorde (maximale entropie) die verenigbaar is met de beperkingen die aan het systeem worden opgelegd.

Nu wordt het wat algemener. Ik veronderstel zoals voorheen dat de thermodynamische (macro-)toestand gespecifieerd wordt in termen van een klein aantal grootheden $X = (X_1, ..., X_n)$ (n is zelden groter dan 4). Die grootheden zijn bijvoorbeeld de dichtheid, de magnetisatie, enz. Bij elk van de vele micro-toestanden x uit de verzameling van mogelijke microscopische configuraties hoort een unieke waarde $X_i(x)$ voor elk van de n macro-grootheden. Omgekeerd zijn er heel veel micro-toestanden die dezelfde macro-waarden opleveren. De definitie van Boltzmann voor de configurationele entropie is

$$S(X) = k_B \log \mathcal{W}(\mathcal{X}) \tag{1.2.14}$$

waarin $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ het aantal micro-toestanden is verenigbaar met de macro-toestand X. $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ wordt weleens de thermodynamische waarschijnlijkheid genoemd maar het is natuurlijk geen echte kans. In het linker- en rechterlid van de definitie moeten we telkens de waarden voor de macro-grootheid X invullen. S zal ook een functie van de micro-toestand zijn door $S(x) = S(X(x))$ te stellen.

Laat ons eens zien of we de definitie kunen toepassen voor een ideaal gas, een gas in een volume V bestaande uit N wederzijds onafhankelijke deeltjes met massa m. De enige beperkingen op ons gas is de beperking van het volume, dat er N deeltjes zijn en het feit dat er een gegeven totale energie E is. Ik ga nu de entropie $S(E, V, N)$ berekenen volgens het algoritme van Boltzmann. Ten eerste is er de vrijheid waar we de deeltjes in het volume zetten. Elk van de N deeltjes kan vrij kiezen over het hele volume V en dus is V^N een goede maat voor het aantal manieren waarop je, qua posities, de deeltjes kan verdelen[6]. Nu komt de vrijheid in snelheden. De totale energie is hier de kinetische energie (1.1.5) waarvoor dus

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} p_i^2 = E, \quad p_i = mv_i \tag{1.2.15}$$

We moeten berekenen op hoeveel manieren deze E kan gerealiseerd worden door de variatie van de vele p_i. De vergelijking (1.2.15) is de vergelijking van een bol $p_1^2 + \ldots p_N^2 = 2mE$ met straal $\sqrt{2mE}$ maar dan wel in $3N$ dimensies. De factor 3 verschijnt hier omdat elke p_i^2 nogmaals de som is van drie componenten volgens de drie ruimterichtingen. Zo een hoog-dimensionale bollen zien we niet vaak maar er is wel een eenvoudige uitdrukking voor hun oppervlakte. In een $3N$-dimensionale ruimte met N zeer groot is oppervlakte ongeveer gelijk aan volume en dus is $(2mE)^{3N/2}$ een goede maat voor de vrijheid qua snelheid of impuls van de N deeltjes. De entropie is

[6] Je kan je afvragen of we ook niet beter delen door het aantal verwisselingen tussen de deeltjes. Als we twee deeltjes van plaats verwisselen, hebben we dan nog dezelfde configuratie? Dat hangt af van het feit of je onderscheidbare dan wel ononderscheidbare deeltjes behandelt. Ik ga daar verder niet op in maar bemerk wel dat de entropie (1.2.16) die we nu verkrijgen toch eigenaardig lijkt: je zou verwachten dat als je V en N met twee vermenigvuldigt, de entropie ook verdubbelt maar dat geldt niet voor (1.2.16)...

dus

$$S(E,V,N) = k_B \ \log\left(V^N (2mE)^{3N/2}\right)$$

of herschreven,

$$S(E,V,N) = k_B N \ \log V + \frac{3Nk_B}{2} \ \log E \tag{1.2.16}$$

We kunnen eens een aantal dingen checken. Bijvoorbeeld, de relatie (1.2.11): hier is

$$\frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{3Nk_B}{2E}$$

maar we weten al van vroeger dat $E = 3Nk_B T/2$ zodat (1.2.11) voldaan is. Laat ons ook eens kijken naar een reversibele transformatie met veranderingen ΔE en ΔV:

$$\Delta S = k_B \frac{N}{V} \, \Delta V + \frac{3Nk_B}{2E} \, \Delta E \tag{1.2.17}$$

Met (1.2.4) kunnen we dat nu ook herschrijven als

$$\Delta S = \frac{W}{T} + \frac{1}{T} \Delta E$$

wat de reversibele versie is van de tweede wet van de thermodynamica, zie (1.2.10).

De relatie $S = k_B \log \mathcal{W}$ prijkt op de grafsteen van Boltzmann. Bij Boltzmann ging het echter niet om een definitie. Het linkerlid (de letter S) stond nog voor de thermodynamische entropie die Clausius vroeger had ingevoerd en de inscriptie op de grafsteen herinnert aan het verband dat Boltzmann wist te maken tussen die definitie van Clausius en de configurationele entropie. Op die manier gaf Boltzmann een statistische betekenis aan de entropie waarin de microscopische wereld verbonden wordt met de macroscopische eigenschappen.

Door op die manier verder te denken krijgt men een microscopische fundering van de tweede wet van de thermodynamica. De entropie stijgt omdat entropie waarschijnlijkheid meet. Het is dus normaal dat een systeem op latere tijden in toestanden komt met een steeds grotere entropie want die zijn net waarschijnlijker.

In andere woorden, de onmogelijkheid van een ongecompenseerde daling van de entropie lijkt gereduceerd tot een onwaarschijnlijkheid. (J.W. Gibbs)

Het stijgen van de entropie werd een principe dat niet alleen bruikbaar is om het typische gedrag van een macroscopisch systeem te beschrijven (zoals Boltzmann reeds had getoond) maar ook (zoals Einstein later demonstreerde) om verborgen aspecten van de microscopische wereld te ontdekken. Voor het eerst verscheen een statistische wet (geen absolute wet) en werden kansoverwegingen bepalend voor de geldigheid van de overgang van microscopische wetten naar macroscopische fenomenen.

1.3 Elektromagnetisme

De theorie van het elektromagnetisme begon eigenlijk pas goed vanaf de 19de eeuw. De elektrische en magnetische krachten waren wel al van oudsher gekend maar het was pas met Michael Faraday dat er een nieuw en vollediger beeld ontstond. Het was tenslotte James Clerk Maxwell die de wetten van het elektromagnetisme in een aantal vergelijkingen kon samenvatten. Eén van de sensationeelste gevolgen was de beschrijving van licht en zijn eigenschappen als elektromagnetische golf. De experimentele verificatie van deze golven werd gerealiseerd door Heinrich Hertz. Tenslotte was het Hendrick Antoon Lorentz die het elektromagnetisme de 20ste eeuw binnenbracht als een gekoppeld systeem van bewegingsvergelijkingen van geladen deeltjes en evolutievergelijkingen voor het elektromagnetische veld.

1.3.1 Fenomenen

De elektrische wisselwerking is ons het meest bekend. Als je je haren kamt of een wollen trui uittrekt, kan je "elektriciteit" voelen. Je kan bijvoorbeeld met de kam kleine stukjes papier aantrekken. Het meest sensationele voorbeeld van elektrische ontlading is de

bliksem. De lading zat voorheen nog opgeslagen in de donkere wolken. We kunnen ook lading opslaan in accu's of batterijen om ze op het gepaste moment te gebruiken. Ook een glazen staaf kan je elektrisch opladen door er met een zijden doek over te wrijven. Die staaf kan je dan weer gebruiken om bolletjes kurk op te laden. Ze worden, wat heet, positief geladen en de bolletjes stoten elkaar af. Raak je één bolletje kurk aan met de geladen glazen staaf en een tweede bolletje met een barnstenen staaf waar je vooraf met een stuk bont over hebt gewreven, dan stel je vast dat de bolletjes elkaar aantrekken. De elektrische werking kan dus afstotend of aantrekkend zijn.

De elektrische toestand van een voorwerp wordt gekarakteriseerd door de lading, positief of negatief. Als we een vrije elektrische lading in de omgeving van een geladen voorwerp brengen, gaat de elektrische lading bewegen. De bijhorende kracht noemen we de Coulomb-kracht en is evenredig met het produkt van de ladingen en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen de twee ladingen. De krachtrichting is in het verlengde van de verbindingslijn tussen de twee ladingen. Dat lijkt dus goed op de gravitatiekracht behalve dat de Coulombkracht zowel afstotend, wanneer de ladingen hetzelfde teken hebben, als aantrekkend, bij ongelijk teken, kan zijn.

Waarom bijvoorbeeld wrijving oplading veroorzaakt, situeert zich in de elektrische structuur van de materie. De bouwstenen van de materie, moleculen en atomen, bevatten elektrisch geladen elementaire deeltjes. De elektrische wisselwerking tussen positieve en negatieve ladingen in de materie beheerst de vorming en combinatie van stoffen, en is allerbelangrijkst in chemische en biologische processen. Deze interactie heeft trouwens een veel grotere magnitude dan de gravitatiekracht. De gravitatiekracht is geheel te verwaarlozen wanneer we bijvoorbeeld de aantrekking tussen elektronen en protonen beschouwen. Het elektron is negatief geladen en het proton heeft de tegengestelde lading van het elektron [7].

[7] Atomen zijn in hun normale toestand elektrisch neutraal. Ze hebben evenveel protonen in hun kern als elektronen daarrond.

Op het einde van de 19de eeuw ging men fenomenen observeren die dat alles zouden ondersteunen.

Als we een metalen draad verwarmen, kan het elektronen uitzenden. Dat heet thermo-emissie. We kunnen ook moleculen “breken” door ze in een oplossing te brengen waarin twee tegengesteld geladen staven, elektroden, zitten. Dat verschijnsel heet elektrolyse. In een zoutoplossing zitten NaCl-moleculen en bij elektrolyse worden ze gesplitst in een positief geladen stukje (het natrium-ion) en een negatief geladen stukje (het chloor-ion).

Door zulke experimenten en door de vruchtbare toepasbaarheid van kinetische gastheorie ook op die situaties, raakte men ook hier overtuigd van het corpusculaire karakter van elektrische lading: elektrische stroom bestaat uit bewegende geladen deeltjes. Hoe meer lading per tijdseenheid door een gegeven doorsnede passeert, hoe groter de stroom.

Sommige materialen zijn magnetisch. IJzer, kobalt en nikkel hebben de eigenschap elkaar te kunnen aantrekken of afstoten naargelang hun onderlinge positie. Kurk of papier zijn niet magnetisch. De aarde zelf is dan weer een reuze-magneet. We zien het in het draaien van de kompasnaald. Het belangrijkste verschil met elektrische ladingen, is dat een magneet altijd zowel een zuidpool als een noordpool heeft. Voor zover we weten zijn er geen afzonderlijke magnetische ladingen (of monopolen) maar altijd een gekoppelde noord- en zuidpool. We kunnen een magnetische staaf in twee breken en vanzelf verschijnt op elk deel weer een noord- en zuidpool. Net zoals de kracht tussen elektrische ladingen gelijkt de kracht tussen magneten nogal op de zwaartekracht. Die valt ook af met de afstand en is gericht in het verlengde van de twee voorwerpen. Als we een stilstaande elektrische lading in de buurt van een magneet brengen, wordt geen extra kracht uitgeoefend. Beweegt echter de lading, dan zien we een nieuwe kracht op de lading. Dat is de Lorentzkracht, evenredig met de grootte van de snelheid van de lading maar in een richting die daar loodrecht op staat. Als er bijvoorbeeld geladen deeltjes of ionen uit de ruimte in de richting van de aarde bewegen, worden ze afgebogen.

Het ontstaan van magnetisme is opnieuw een vraag over de bouw van de materie. Een belangrijk fenomeen dat hier moet in rekening gebracht worden, is dat elektrische stromen kunnen werken als magneten. Denken we bijvoorbeeld aan een spoel. Een spoel bestaat uit een aantal coaxiale cirkelvormige windingen die alle dezelfde elektrische stroom voeren. Het blijkt dat zo een spoel een kompasnaald kan doen uitwijken. Dat is het befaamde experiment van Öersted uit 1820. Wanneer in een keten een stroom loopt, dan wekt die een magnetische kracht op evenredig met die stroom, beschreven in de zogenaamde wet van Ampère.

Het bovenstaande betreft altijd elektrische of magnetische krachten die niet afhangen van de tijd. Het meest interessante komt nog en is vooral geassocieerd met de namen van Faraday, Maxwell en Hertz. Michael Faraday was de grote experimentator en Maxwell gaf de synthese van Faraday's inzichten.

Een eerste fenomeen is dat van de elektromagnetische inductie. Het is de grondslag van de dynamo en vele andere toestellen voor dagelijks gebruik. We kunnen elektrische ladingen in beweging brengen als de eigenschappen van het magnetisme in de buurt met de tijd veranderen. Plaatsen we bijvoorbeeld een geleider in de buurt van een ronddraaiende magneet, dan zien we een elektrische stroom verschijnen, waarmee we een lampje kunnen doen branden. Een andere toepassing is de transformator waar twee stroomketens elkaar gaan beïnvloeden.

Een tweede maar minder duidelijk dynamisch fenomeen is dat bij een elektrische wisselwerking die tijdsafhankelijk is, een magnetische kracht onstaat. Er zijn dus twee manieren om magneten te maken, ofwel via spoelen ofwel door het creëren van een tijdsafhankelijke elektrische toestand. Het belangrijkste experimenteel feit ter bevestiging is het bestaan van elektromagnetische golven of licht. Daarmee gaan we nu eerst van start.

1.3.2

Wat is licht I

Newton wist het al: licht bestaat uit deeltjes. Zijn corpusculaire theorie van het licht was niet deze die we vandaag hanteren maar was toch wel zeer uitgewerkt. Het is in zekere zin normaal om licht op te vatten als bestaande uit deeltjes. Eén van de eerste dingen immers dat opvalt, is dat licht zich in rechte lijnen of stralen voortplant. De breking van licht aan een wateroppervlak zou kunnen verklaard worden door de botsingen van de deeltjes met dat oppervlak. Voor het verklaren van kleuren had Newton dan wel weer veel soorten deeltjes nodig: deeltjes zijn verschillende kleurdragers. De ontbinding van het licht in kleuren is dan als het ware het uitfilteren van de deeltjes die de gepaste kleur dragen. Het witte licht bestaat uit alle soorten kleurdeeltjes en wanneer de lichtstraal door een prisma valt, werken er afhankelijk van de kleur, iets andere krachten zodat de straal uiteenvalt in een kleurenspectrum.

Niet iedereen volgde Newton. Christian Huygens dacht over licht als een golfbeweging. We werpen een steen in de vijver en deze lokale verstoring laat zich voelen in brederwordende kringen. De dobber aan de vislijn gaat even op en neer maar wordt niet horizontaal verplaatst.

Net zoals je watergolven hebt of drukgolven, heb je lichtgolven. Bij golven wordt de materie zelf niet verplaatst maar er is wel een voortplanting van een "storing in het medium." Het is zo duidelijk dat we energie kunnen verplaatsen met golven. Als we nu nog warmte als een soort energie interpreteren en meermaals voelen dat licht en warmte samengaan, lijkt het niet dwaas om licht als een soort golf te zien.

De interpretatie van kleur is hier ook gemakkelijk. Een golf heeft namelijk iets periodisch. Er is een afstand waarover het golfverschijnsel zich telkens herhaalt. Dat is de golflengte, en de tijd van herhaling, dat is de frequentie. Kleur is dan gewoon een ander woord voor de frequentie van de lichtgolf. De golflengte van

rood licht is 0,0008 mm, de golflengte van violet licht is 0,0004 mm.

De experimenten gaven Huygens alleszins gelijk. De belangrijkste fenomenen zijn hier diffractie en interferentie. Diffractie is de buiging van het licht — het is eigenlijk niet helemaal waar dat licht zich volmaakt rechtlijnig voortplant. Afhankelijk van de afmetingen van de gaatjes en de hoekjes (vergelijkbaar met de golflengte van het licht) kunnen we het licht zien buigen. Interferentie is ook zo een typisch golffenomeen. Als we tegelijk twee stenen in het water gooien, zien we op een bepaald moment de golven overlappen. Er ontstaat een nieuw patroon. Twee scenario's zijn mogelijk: versterking en verzwakking. Waar de bergjes van de golf samenvallen, zie je een nog grotere berg en waar een berg en een dal samenkomen, dooft de golf uit. Hier is de proef van Thomas Young (1804) het beslissende experiment. Wanneer licht door twee kleine gaatjes in een muur passeert, zien we strepen van licht en duister op een scherm erachter. Samen met nog andere experimenten, bijvoorbeeld van Fresnel, geraakte men op het einde van de 19de eeuw overtuigd van het golfkarakter van het licht. Dat werd nog theoretisch bevestigd door het werk van Maxwell.

1.3.3

De wetten van Maxwell

Hiervoor hebben we ons een aantal elementaire zaken van het elektromagnetisme herinnerd. Ik heb me nochtans ingespannen om bepaalde woorden nog niet expliciet te vermelden. Het belangrijkste concept dat ontbreekt, is dat van "veld." We spreken over het elektrische, het magnetische of samen, over het elektromagnetische veld. Dat veldconcept heeft een revolutionaire betekenis gehad binnen de fysica. Bij de honderdste verjaardag van de geboorte van Maxwell, in 1931, schrijft Einstein over

een programma dat passend dat van Maxwell mag genoemd worden: de beschrijving van de Fysische Realiteit door middel van velden die, zonder singulariteiten, voldoen aan een collectie partiële differentiaalvergelijkingen.

Een eerste plaats waar een veldbeschrijving past, is in de beschrij-

ving van een grootheid die van plaats tot plaats varieert. Zo kan een zelfde lichaam[8] op verschillende plaatsen aan verschillende groottes en richtingen van spanning onderhevig zijn. In een zee of een rivier, kan de snelheid van de stroming en de temperatuur van het water op verschillende locaties anders zijn. Die ruimtelijke profielen of plaatsafhankelijke grootheden noemen we velden. In het elektromagnetisme speelt deze visualisatie of boekhouding zeker een belangrijke rol in het beschrijven van de elektrische of magnetische krachten. Er komt echter iets veel belangrijker bij. De elektrische en magnetische velden, een toekenning van een elektromagnetische grootheid aan elk punt, krijgen een aparte realiteit en hoeven niet langer vast te hangen aan specifieke bronnen of materiële dragers. We zullen de fenomenen uit 1.3.1 hier zo herhalen dat dit aspect zichtbaar wordt. De uiteindelijke formulering van de elektromagnetische theorie kan dan samengevat worden in de wetten van Maxwell. Zoals Heinrich Hertz, groot pionier van het elektromagnetisme, het uitdrukte: *het elektromagnetisme, dat zijn de wetten van Maxwell.*

Er zijn positieve en negatieve elektrische ladingen; gelijke ladingen stoten elkaar af en ongelijke trekken elkaar aan. Zo kan de aanwezigheid van een lading "gevoeld" worden in elk punt van de ruimte. Brengen we daar een andere lading, dan wordt een kracht voelbaar. Als we in de ruimte rondom met een specifieke lading rondgaan, kunnen we op elk punt aanduiden hoe groot en in welke richting de elektrische kracht werkt. Daarmee visualiseren we het elektrische veld.

Magneten thuis kan je gemakkelijk onder een vel papier leggen. Het magnetische veld kan gevisualiseerd worden door ijzervijlsel te strooien op het papier. In elk punt van de ruimte is dat "veld" in een bepaalde richting geörienteerd en heeft het een bepaalde sterkte. De dichtheid van de lijnen zegt iets over de sterkte en de richting van de lijnen vertelt ons in welke richting de krachten werken. We merken op dat de magnetische veldlijnen gesloten zijn; er zijn geen bronnen. Er is altijd samen een noordpool en een zuid-

[8]Het woord "lichaam" wordt dikwijls in de fysica gebruikt in plaats van "voorwerp".

pool. Tot zover de eerste twee wetten van Maxwell.

Het wordt wat vreemder wanneer we de invloed van bewegende ladingen observeren. Die geven immers aanleiding tot magnetische krachten. Herinner je dat de naald van een kompas een nieuwe richting kan aannemen in de nabijheid van een elektrische stroom (de proef van Öersted). Een spoel waardoor een elektrische stroom gaat, gedraagt zich als een magneet. Ik vind het moeilijk om in woorden uit te leggen hoe de kracht eruit ziet op een magneet onder invloed van een elektrische stroom. Er zijn natuurlijk afkortingen en formules maar hier houden we het best zicht over de aanwezige krachten door tekeningen te maken. We tekenen dan de veldlijnen en vinden zo vanzelf de krachten.

Het veldconcept is echter meer dan een handige boekhouding. We ondervinden experimenteel dat van zodra zo een spoel en een andere — gewone — magneet hetzelfde veld hebben, ook al hun elektrische of magnetische acties en invloeden identiek zijn. Ook de interactie tussen twee spoelen (aantrekking of afstoting) gebeurt net zoals bij magneten. We besluiten dus dat het veld alle eigenschappen van de materiële dragers representeert. We kunnen die dragers zelfs wegdenken en alleen met de velden werken. Het veld zelf blijkt essentieel; de verschillen tussen de bronnen zijn onbelangrijk. Deze unificatie en reductie van de fenomenologie schenkt aan het veldconcept een realiteit.

Ook methodologisch krijgen we een zet. Dat veldconcept brengt ons immers op het spoor van nieuwe wetten en veralgemeningen. Een elektrische stroom veroorzaakt een magnetisch veld. Er zijn geen magnetische stromen maar we kunnen nu wel een veranderend magnetisch veld indenken en we kunnen vermoeden dat dit een elektrisch veld veroorzaakt. Dat is inderdaad de derde wet van Maxwell: een veranderend magnetisch veld genereert een elektrisch veld. We kunnen dat unieke principe in termen van velden dan weer gebruiken om stroom te genereren op heel veel materiële manieren. Bijvoorbeeld, we nemen een spoel die een gesloten kring maakt en brengen een magneet in de buurt. Als we de positie van de magneet veranderen, bijvoorbeeld in of uit de spoel, zien we voor

korte tijd een elektrische stroom gegenereerd in de spoel. Zo een stroom betekent dat er een elektrisch veld is die de ladingsdragers doet bewegen. Precies hetzelfde effect wordt verkregen wanneer een stroomdragende spoel in de nabijheid van de gesloten spoel wordt gebracht. Opnieuw, het is voldoende te denken in termen van de velden, niet van de bronnen.

Tenslotte de vierde wet van Maxwell, naar analogie met de voorgaande: niet alleen elektrische stroom maar ook de verandering van het elektrische veld veroorzaakt een magnetisch veld[9]. Dat inzicht vormt de sluitsteen van de wetten van Maxwell en is van essentieel belang om de stap naar elektromagnetische golven te zetten.

Wat nog moet opvallen in de vorige beschrijvingen is dat elektrische en magnetische interacties wel heel nauw met elkaar samengaan. Ze kunnen als het ware in elkaar veranderen — het ene kan het andere veroorzaken. We spreken daarom over de elektromagnetische wisselwerking. De ultieme unificatie tussen elektriciteit en magnetisme zal echter pas verschijnen in de publicatie van Einstein over de speciale relativiteitstheorie. We zullen zien hoe hij dat artikel precies begint met het opmerken van een zekere nog bestaande asymmetrie tussen magnetische en elektrische wisselwerking en hoe dat eigenlijk niet mag als het principe van Galileo, zie paragraaf 1.1.3, ook van toepassing is op elektromagnetische fenomenen.

De vergelijkingen van Maxwell bevatten ook brontermen. Brontermen worden gegeven door de verdeling en de beweging van geladen deeltjes. We moeten ze kennen om de vergelijkingen van Maxwell op te lossen. De oplossing beschrijft het elektromagnetisch veld. Om dat systeem van vergelijkingen te vervolledigen hebben we dus nog nodig te weten hoe geladen deeltjes bewegen in de aanwezigheid van die velden. Het was Lorentz die rond 1895 de vergelijking opstelde voor de beweging van geladen deeltjes. Samen met de vergelijkingen van Maxwell vormt dit Maxwell-Lorentz-systeem de volledige dynamica voor het elektromagnetische veld èn de geladen deeltjes. We hebben al de Lorentz-kracht genoemd in 1.3.1.

---

[9] Dat was de specifieke theoretische voorspelling van Maxwell.

Het was voornamelijk bij de studie van de beweging van het pas ontdekte elektron dat Lorentz heel dicht in de buurt kwam van wat later de speciale relativiteitstheorie is geworden. Het was daar de ambitie van Lorentz en anderen om als het ware die nieuwe mechanica te deduceren vanuit eigenschappen van de materie. De werkwijze van Einstein zal helemaal anders zijn. We zullen later zien hoe weer het voorbeeld van de statistische thermodynamica wenkt.

1.3.4

Wat is licht II

Duidelijk kunnen we dingen in beweging zetten door de aanwezigheid van een elektromagnetisch veld — het draagt energie — en moeten we arbeiden om het veld sowieso te installeren. De energie van een statisch, dat is niet tijdsafhankelijk, elektromagnetisch veld blijft constant in de tijd. Wanneer het veld tijdsafhankelijk is, verandert de elektromagnetische energie in elk punt met de tijd. Niet zomaar, maar onderhevig aan de vergelijkingen van Maxwell. Nu kan energie ook getransporteerd worden. Als bijvoorbeeld een lading versneld wordt, dan stuurt die energie uit. Dat heet elektromagnetische straling. Je kan het als volgt bedenken.

Ladingen in versnelling zijn als kleine antennes. Door het heen en weer lopen verandert het elektromagnetisch veld in de tijd. De trillingen van het elektrische veld genereren een trillend magnetisch veld dat op zijn beurt weer een elektrisch veld voortbrengt, enzovoort. Dat sneeuwbaleffect zit natuurlijk in de 3de en 4de wet van Maxwell. Maxwell had berekend dat dit effect zich voortplant met de snelheid c van het licht, zo een 300 000 km per seconde in vacuum en iets verschillend in andere media, zoals Huygens al lang geleden had voorspeld. Dat kon geen toeval zijn. Vlug bleek dat licht ook zo een elektromagnetische golf is waarin de veranderende elektrische en magnetische velden elkaar als het ware voortduwen. Op die manier konden immers typische lichtfenomenen zoals interferentie en diffractie op een eenvoudige manier beschreven worden: de vergelijkingen van Maxwell geven een consistente en kwanti-

tatief correcte berekening van tal van lichtfenomenen. Zodoende verenigt Maxwell ook de optica met het elektromagnetisme.

Het blijkt ook dat er nog andere soorten "licht" bestaan dan het voor ons zichtbare licht (daarom spreken we over elektromagnetische straling), bijvoorbeeld X-stralen en radiogolven. Die golven hebben gewoon een andere golflengte (of frequentie) maar blijven beschreven door de vergelijkingen van Maxwell.

Het bestaan van zulke golven werd experimenteel aangetoond door Hertz in 1888 (en we horen en zien dat nu alle dagen). De ontdekking van de aard van elektromagnetische golven als beschreven door de vergelijkingen van Maxwell behoort ongetwijfeld in de recente geschiedenis tot de grootste verwezenlijkingen van de mensheid.

1.3.5

Zwarte straling

Een belangrijk onderzoeksonderwerp uit de 19de eeuw betrof de aard van de straling die wordt uitgezonden door verwarmde voorwerpen bij een zekere temperatuur. Men vraagt naar de verdeling van de intensiteit van de uitgezonden (elektromagnetische) straling als functie van de frequentie (of kleur) van die straling.

Beschouw een holte met wanden die op een zekere temperatuur worden gehouden. We kunnen indenken dat de atomen in de wanden bewegen. Er doen zich trillingen voor waarvan de aard afhangt van de temperatuur. Vermits materie een elektrische samenstelling heeft, bijvoorbeeld via elektronen, krijgen we dan ladingen die versneld worden, net zoals massa's aan veertjes. Dus zal er elektromagnetische straling worden uitgezonden. Bij evenwicht krijg je dat ook straling wordt geabsorbeerd door de wanden. De hoeveelheid energie die door de wanden per tijdseenheid wordt uitgestraald, is dan gelijk aan deze die geabsorbeerd wordt. Het is interessant te onthouden dat we hier een combinatie hebben gemaakt van enerzijds, het mechanisch-atomistische beeld van de materie, en anderzijds het continue golfachtig karakter van elektromagnetische straling. De opening van het artikel van Einstein over fotonen

en straling, wijst precies daar op.

Experimenten tonen dan dat de ingesloten straling een goed gedefinieerde verdeling heeft. Ik bedoel de verdeling over de verschillende aanwezige frequenties of kleuren. Er is immers niet één kleur van het licht; alle kleuren zijn aanwezig maar niet in even grote mate of intensiteit. Bij elke frequentie hoort een energiedichtheid $e(T, \nu)$ rond frequentie ν die verder enkel afhangt van de temperatuur T van de wanden.

De definitieve experimentele curves werden gevonden door Otto Lummer en Ernst Pringsheim in 1899. De verdelingen hebben een maximum als functie van de frequentie en de frequentie die hoort bij dat maximum verhoogt bij hogere temperatuur. We observeren dus een andere kleur van het verwarmde object bij een andere temperatuur. Bijvoorbeeld, maken we een klein gaatje in de holte waaruit straling kan ontsnappen, dan zien we dat oventje heel helder oplichten bij hoge temperaturen maar het wordt gauw zwart bij lagere temperaturen. De intensiteit van straling in het zichtbare gebied is verwaarloosbaar bij lage temperaturen. Vandaar de naam zwarte straler. De studie van deze ideale straler — ideaal omdat er geen contaminatie van buitenaf mogelijk is — was technologisch interessant in de 19de eeuw. Het is hier kwestie van kwaliteit van lampen, van emissie en absorptie van licht en warmte.

De experimentele curve werd voor het eerst in een passende theoretische vorm gegoten door Max Planck. Dat gebeurde in 1900 en hij vond

$$e(\mathbf{T}, \nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \tag{1.3.1}$$

waarin een nieuwe fundamentele constante, de zogenaamde constante van Planck aangeduid met de letter h, zijn intrede doet. De waarde van h kan uitgedrukt worden in eenheden van impuls maal positie, of

$$h = 6.6256 \times 10^{-34} \; \frac{kg\, m^2}{s}$$

Merk op dat $h\nu$ en $k_B T$ allebei de dimensie hebben van energie. De argumentatie van Planck is hier niet belangrijk en is vooral nog

interessant voor wetenschapshistorici. Het zal Einstein zijn die in 1905 met de fotonen-hypothese de start geeft van de kwantummechanica waardoor het probleem uiteindelijk zal worden begrepen.

1.3.6

Foto-elektrische effect

Heinrich Hertz gaat de geschiedenis in als groot verificator van de theorie van Maxwell. Dat impliceert de golftheorie van het licht. Ironisch genoeg ligt hij ook aan de basis van de deeltjestheorie van het licht, namelijk met het experiment van het foto-elektrische effect.

In 1887 onderzoekt Hertz de elektrische ontlading tussen twee elektroden. Hij stelt vast, voor een deel per ongeluk, dat de ontlading verhoogd werd wanneer de elektroden worden beschenen met ultraviolet licht. Met licht, zo werd gesuggereerd, kan je elektronen doen ontsnappen van het metaaloppervlak. Deze foto-elektrische emissie werd verder onderzocht door Wilhelm Hallwachs en Philipp Lenard, studenten van Hertz, zeker tot in 1902 maar gauw bleken een aantal eigenaardigheden.

De emissie van elektronen wordt verhoogd wanneer de intensiteit van het licht wordt opgevoerd. Dat is normaal want er komt meer energie aan te pas en we stellen ons voor dat de elektronen in kwestie in het metaal enigszins gevangen zitten. Er moet een binding verbroken worden en dat kost energie. Echter, er is ook een specifieke afhankelijkheid van de frequentie van het licht. Voor elk materiaal is er een bepaalde drempelwaarde voor de frequentie. Hoe groot de intensiteit ook is, geen foto-emissie vindt plaats als de frequentie van het ingeschoten licht lager is dan die drempelwaarde. Pas vanaf die drempelwaarde, als de frequentie dus hoog genoeg is, treedt het effect op en worden elektronen uit het metaal bevrijd.

1.3.7 Ether

Mechanica kent golven. Er is de continuum-mechanica waarin geluidsgolven of watergolven een beschrijving en verklaring vinden. Geluid is bijvoorbeeld een drukgolf die zich voortplant door de lucht, van stemband tot oor. Het is normaal zich af te vragen waaraan die elektromagnetische golven zich vastgrijpen. Als licht een golf was volgens de elektromagnetische theorie van Maxwell, wat was dan het materiële medium waarin licht beweegt? Het medium voor licht werd de *ether* genoemd, een notie die nu geheel is verdwenen. De ether zou het medium zijn waarin de elektromagnetische golven zich voortplanten, net zoals we lucht nodig hebben om onze stem te dragen.

De ether-theorie kwam vooral tevoorschijn in de 19de eeuwse optica. De golftheorie van het licht, bijvoorbeeld volgens Augustin Fresnel, voerde de ether op als medium voor de voortplanting van het licht. Dat moest allerlei eigenschappen hebben. De ether kon geen gewicht hebben maar moest toch in bepaalde mate elastisch zijn. De elektromagnetische storingen zouden zich dan in de ether voortplanten met een bepaalde snelheid ten opzichte van die ether. Deze snelheid zou de lichtsnelheid zijn die viel af te lezen uit de wetten van Maxwell net zoals geluid een snelheid heeft ten opzichte van de lucht. Als gevolg zou de snelheid van het licht dat zich voortplant door een voorwerp afhankelijk zijn van de relatieve beweging van dat voorwerp ten opzichte van de ether.

Dat dit effect niet werd gevonden, was één van de spanningen en problemen in de fysica rond 1900; zie verder in 1.4.3.

1.4 Spanningen

Op het einde van de 19de eeuw waren de gevoelens over de stand van de fysica zeer gemengd. Enerzijds heerste een sfeer waarin

gedacht werd dat het einde van de fysica in zicht was. Alle problemen zouden, mits de nodige uitwerkingen, mettertijd kunnen gereduceerd worden tot problemen in de thermodynamica, mechanica of elektromagnetisme. Het zou slechts een kwestie van tijd zijn om alle mogelijke vraagstukken op te lossen. Hier is een typisch voorbeeld:

Het lijkt waarschijnlijk dat de meeste van de grote unificerende principes stevig gevestigd zijn en dat verdere vooruitgang voornamelijk moet gezocht worden in de rigoureuze toepasssing van deze principes op alle fenomenen die nog onder ogen komen. (A. Michelson, 1894)

Anderzijds waren sommigen zich goed bewust van een aantal donkere wolken die boven het fysicalandschap zweefden en die concretisaties waren van de spanningen tussen de hoofddomeinen in de fysica. In een redevoering uit 1900 spreekt Kelvin over *de wolken van de 19de eeuw over de dynamische theorie van warmte en licht.*

Tussen het triomfgevoel over het einde van de fysica en de resterende interne spanningen regeerde dikwijls het gevoel dat het elektromagnetisme en zelfs de thermodynamica fundamenteler waren dan de mechanica. In thermodynamica waren er de *energetici* waarvoor materie bestaat uit en onderworpen is aan energie. Alle gebeurtenissen waren finaal niets anders dan veranderingen in energie. Dat vond goed aansluiting bij het elektromagnetisme en het ontluikend vermoeden dat alle eigenschappen van de materie konden worden afgeleid uit haar elektrische of magnetische samenstelling. Er was bovendien de etherhypothese, het geloof in een continu alles doordringend elektromagnetisch medium waarover ik schreef in 1.3.7.

In beide gevallen leek het op een afzweren van het materialisme. Er was wel de fysica van de materie en de fysica van het elektromagnetisme maar als men het dualisme tussen beide wou vermijden, koos men resoluut voor de energie- , de ether- en de veld-concepten. Dit was misschien een afspiegeling van een meer algemene tijdsgeest:

De hele culturele configuratie bij de eeuwwisseling was in een verandering van mechanisch naar elektromagnetisch denken. De imma-

teriele elektromagnetische concepten waren in dezelfde mate aantrekkelijk als dat de inerte materiële beelden van de mechanica onaangenaam werden. (McCormmach, 1970)

Minder dramatisch kan men stellen dat de mechanica als toegepast op continue media, de zogenaamde continuum-mechanica, veel meer kans leek te hebben om zich te verzoenen met thermodynamica en elektromagnetisme. De atoom-hypothese leek nergens voor nodig. Het werk van Einstein zal een kentering betekenen.

1.4.1

Tussen mechanica en thermodynamica

Ook al was er goede theoretische evidentie dat thermodynamica kon begrepen worden vanuit de mechanica, er bleef de hypothese dat alle materie bestaat uit moleculen of atomen die onderling interageren. De discussie bleef bestaan in welke zin de atoomhypothese zichtbare gevolgen had en of die granulaire structuur ook werkelijk kon waargenomen worden.

Thermodynamica had haar pluimen al verdiend — de westerse wereld was er zichtbaar door getransformeerd. Kinetische gastheorie met haar mechanische basis stond in de beginschoenen. Het was maar theorie, voor sommigen louter speculatie. Statistische mechanica was gebaseerd op een atoomhypothese die voor sommigen niet nodig was en zelfs ongepast omdat er geen overtuigende bewijzen voor waren. Pas in 1920 zou Otto Stern erin slagen om de Maxwell-verdeling (1.2.13) zichtbaar te maken. Bovendien kwamen er statistische beschouwingen aan te pas die onvertrouwd en te vaag bleven.

Er waren concepten en manieren van denken in de thermodynamica die moeilijk verenigbaar leken met de mechanica van deeltjes. Nergens komt het woord temperatuur voor in de wetten van Newton en er is geen entropie te vinden op de gladde biljarttafel van de mechanica. Het leek heel moeilijk om de thermodynamica te verzoenen met de mechanica. De stijl van de statistische mechanica betekende ook een breuk met de fenomenologische aanpak van

de thermodynamica. Men begon vereenvoudigende hypotheses te maken over de mechanische wereld; er werd gewerkt met modellen die ver van realistisch waren. Men sprak in beelden waarvoor de meer traditionele fysicus vlug zijn geduld verloor. Ernst Mach sprak over "denkeconomie" en hamerde op een minimum van kentheoretische hulpmiddelen. Wilhelm Ostwald had in 1895 voor een congres van Duitse fysici en chemici gepleit voor een opheffing van het wetenschappelijk materialisme. Hij herhaalde bijna letterlijk het citaat uit Exodus 20:4: *Ge zult geen beeld of gelijkenis maken.*

Er waren bovendien fenomenen die gewoon in tegenspraak leken met de mechanica van Newton. Het belangrijkste voorbeeld is de tweede hoofdwet en het verschijnen van de pijl van de tijd. De pijl van de tijd verwijst naar onze ervaring van een unidirectionele tijd. De tijd loopt (vooruit). We worden geboren, worden ouder en sterven. Een geluid sterft uit. Een intense geur wordt minder sterk. We worden inderdaad dagelijks geconfronteerd met fenomenen die irreversibel zijn. Het filmpje in de andere zin laten lopen zou een volledig onvertrouwd en meestal grappig beeldverhaal geven. Het op de grond gevallen en gebroken glas zou weer op de tafel springen nadat al de stukjes met de inhoud zich precies weer samengesteld hebben. Het lauwe water zou zich scheiden in warm en koud water.

Als elke beweging, groot of klein, precies werd omgedraaid en de wereld dan weer verder ging, dan zou alles omgekeerd verlopen. Het frisse water zou zich vanuit de zee verzamelen, de rivier oplopen en uiteindelijk als druppels omhoog vliegen in de wolken. De druppels zouden warmte uit de lucht opnemen en verdampen en nadien, als ze condenseren, zouden ze lichtstralen naar de zon schieten enzovoort. Natuurlijk zouden alle levende dingen evolueren van graf tot wieg en we zouden de toekomst herinneren, niet het verleden. (J.C. Maxwell)

De mechanica in tegenstelling is reversibel. Er is geen verleden of toekomst in de wetten van Newton. Wanneer we in de vergelijkingen van Newton de tijd en ook alle snelheden van teken omdraaien, gebeurt er essentieel niets. Dat wil zeggen dat als de beweging van een systeem gegeven wordt als oplossing van de vergelijkingen van Newton, dan zal de omgekeerde beweging even zinvol zijn als oplos-

sing van de wet van Newton. Mechanische beweging is symmetrisch in de tijd. Door het filmpje te bekijken van de beweging kunnen we niet te weten komen of het de reële opname is of de omgekeerde opname.

Als alle macroscopische fenomenen uiteindelijk beschreven worden en moeten afgeleid worden met één of andere ingewikkelde berekening vertrekkend van de fundamentele wetten van de (microscopische) fysica, hoe kan het dan dat we dagelijks irreversibele macro-fenomenen waarnemen ? Dat heet de irreversibiliteitsparadox. Volgens sommigen was dat de doodssteek voor de mechanica. Hier reageert Ludwig Boltzmann:

Uit het feit dat de differentiaalvergelijkingen van de mechanica onveranderd blijven na het omkeren van het teken van de tijd, besluit de heer [Wilhelm] Ostwald dat de mechanische kijk op de wereld niet kan verklaren waarom natuurprocessen altijd bij voorkeur in een bepaalde richting lopen. Zulk een opinie lijkt me echter voorbij te gaan aan het feit dat mechanische gebeurtenissen niet alleen gedetermineerd worden door differentiaalvergelijkingen maar ook door beginvoorwaarden. In directe tegenspraak met de heer Ostwald heb ik het één van de meest briljante bevestigingen genoemd van de mechanische opvatting van de Natuur dat het een buitengewoon goed beeld verschaft van de dissipatie van energie, als men maar aanneemt dat de wereld begon van een [speciale] toestand.

Het waren vooral chemici die de lichtende fakkel van het atomisme brandend hebben gehouden, om ze in de tweede helft van de 19de eeuw door te geven aan de fysici.

1.4.2 Tussen thermodynamica en elektromagnetisme

Ook de combinatie van thermodynamica met het elektromagnetisme zorgde voor problemen. Meer algemeen doken er telkens moeilijkheden op wanneer men situaties wou beschrijven waarin materie en elektromagnetische straling interageren.

Het historisch belangrijkste voorbeeld is dat van de zwarte straling. Ik heb het ingeleid in 1.3.5. De klassieke theorie bleek in tegenspraak met de experimentele waarnemingen. In zijn eerste publicatie uit 1905 zal Einstein dat expliciet opmerken. Er was wel de experimentele curve en de formule van Planck uit 1900, zie (1.3.1), maar geen klassieke theoretische afleiding. Nog erger, de klassieke theorie maakte een specifieke voorspelling maar die was in tegenspraak met het experiment. Planck was een top-thermodynamicus maar kon de verzoening met de thermische straling niet bewerken zonder een *ad hoc* hypothese te maken die velen, en hemzelf eerst, zeer onbevredigend leek.

Er was verder het probleeem van het foto-elektrische effect, aangehaald in (1.3.6). De systematische experimenten van Philipp Lenard daarover uit 1902 bleven onverklaarbaar. Hoe kon het dat blauw licht wel en rood licht geen elektronen kon bevrijden uit een metaaloppervlak?

1.4.3

Tussen elektromagnetisme en mechanica

In het Newtoniaanse wereldbeeld denkt men aan materiële objecten die op elkaar inwerken ofwel via directe botsingen ofwel via de gravitatiekracht en energie is gedragen door massieve voorwerpen[10].

In tegenstelling: de theorie van Maxwell vertrekt van het veldconcept en de vergelijkingen van Maxwell geven de verandering van elektrische en magnetische velden in elk punt van de ruimte.

De elektromagnetische golven uit de theorie van Maxwell planten zich voort met een vaste snelheid c, de lichtsnelheid. In het luchtledige is die snelheid ongeveer $c = 300000$ km per seconde. Men zou denken dat als we heel vlug in een bepaalde richting bewegen,

[10] Het is interessant te ontdekken hoe in de 19de eeuw, de mechanistische visie methodologisch essentieel is geweest voor de ontwikkeling van de theorie van Maxwell. Nochtans gaan de vergelijkingen van Maxwell voorbij aan de puur mechanische concepten of beelden die daarvoor geprobeerd zijn.

de lichtsnelheid in diezelfde richting zou verminderd worden (alsof we het licht aan het inhalen zijn) en als we in de tegengestelde richting bewegen, zou de lichtsnelheid moeten toenemen (omdat we er naar toe lopen). Inderdaad, de combinatie van de mechanica van Newton met de vergelijkingen van Maxwell voldoet niet aan het relativiteitsprincipe van Galileo. De vorm van de Maxwell-vergelijkingen verandert onder de Galilei-transformaties.

De interpretatie van dat laatste werd geboden door de etherhypothese 1.3.7. De lichtsnelheid zou afhangen van de relatieve beweging ten opzichte van de ether. De vraag was dan of men een effect van die ether kan identificeren? Zulke problemen bleken uit de experimenten (1881–1887) van Michelson en Morley. Deze toonden dat de opgemeten snelheid van het licht hier op aarde niet beïnvloed wordt door de beweging van de aarde rond de zon. Meer algemeen, dat de lichtsnelheid niet afhangt van de bewegingstoestand van de bron of de ontvanger, of ingewikkelder, dat elektromagnetische fenomenen niet kunnen gebruikt worden om een absoluut rustend referentiestelsel als de ether te bepalen. De etherhypothese was heel moeilijk vol te houden maar bleek ook moeilijk los te laten.

Sommigen als Lorentz probeerden de vlucht vooruit, het zoeken van een uitweg via de nieuwste inzichten over de elektrische bouw van de materie om de nul-resultaten uit het experiment van Michelson-Morley te verklaren. Volgens Lorentz moest het ethereffect zichtbaar zijn en omdat het Michelson-Morley experiment een nul-resultaat gaf, besluit Lorentz de zogenaamde Lorentz-contractie in te voeren, dat is een lengtekrimp waarin een voorwerp dat beweegt in dezelfde richting als de aarde (tegenover de ether) zou krimpen met een zekere factor γ (die ik in (2.5.1) zal uitschrijven). Een gelijkaardige uitleg was al gegeven door George FitsGerald in 1889. Zonder het echt te verklaren, namen ze beide aan dat die contractie het gevolg was van veranderingen in de moleculaire krachten.

In de volgende jaren ontwikkelt Lorentz de theorie en eerst in 1899 en dan in 1904 leidt hij de lengte-contractie af van meer algemene transformatieformules, nu gekend als de Lorentz-transformaties

(later in 2.5.2). Ze geven de coördinaten van een voorwerp dat beweegt ten opzichte van de ether in termen van deze in rust tegenover de ether. Die formules waren al verschenen in werk van Woldemar Voigt in 1887 en van Joseph Larmor in 1900 en konden perfect het nul-resultaat in het Michelson-Morley experiment uitleggen. Lorentz bleef echter een dynamische kijk hebben op de zaak. Er was zogezegd een fysische oorzaak voor die transformaties, iets tussen de ether en de elektronen van het bewegende voorwerp. De ether fungeerde bij Lorentz nog steeds als een absoluut referentiekader en hij hield vast aan absolute gelijktijdigheid.

Er waren anderen, meer in het bijzonder Ernst Mach, die sterke kritiek hadden geuit op zulke noties als absolute tijd en absolute ruimte. Mach vond die noties metafysisch en niet gebaseerd op experiment of zelfs intuïtie. Einstein schrijft dat het boek van Mach uit 1889 en de kritiek daarin op het Newtoniaans wereldbeeld op hem *een diepe invloed uitoefenden* tijdens zijn studentenjaren.

Tenslotte moet hier ook de naam van Henri Poincaré vallen. Hij ook trok de absoluutheid van gelijktijdigheid in twijfel. In 1898 schrijft hij dat als het licht een constante snelheid heeft, er een nieuwe definitie voor gelijktijdigheid ontstaat. In 1900 stelt hij op een wereldcongres in Parijs in twijfel of de ether werkelijk bestaat. In 1902 doet hij de vraag af als metafysisch. Het meest bekend is echter zijn traktaat van 1904 voor het congres van St. Louis:

Volgens het Relativiteitsprincipe moeten de wetten van fysische fenomenen dezelfde zijn voor een "vaste" waarnemer als voor een waarnemer die er eenparig rechtlijnig tegenover beweegt... er moet een totaal nieuwe soort dynamica ontstaan, die boven alles gekarakteriseerd zal zijn door de regel dat geen snelheid groter kan zijn dan die van het licht.

Poincaré gaat verder en geeft een wiskundige ontwikkeling van deze nieuwe relativiteitstheorie. Op het eerste zicht lijkt het zeer parallel te zijn aan het werk van Einstein uit 1905. En toch ademt het helemaal anders. De verschillen en nuances zijn veelbesproken en beschreven. Ik wil dat hier niet herhalen; enkel dit: bij Einstein is er geen sprake van beschouwingen over conventionalisme; de theo-

rie van Einstein is in de eerste plaats fysica en spreekt over reële lengte-contractie en tijdsverlenging, over het leggen van meetlatten en het kijken naar klokken.

Tenslotte, iemand die gelooft in atomen, in de corpusculaire theorie van de materie, die ziet hoe de mechanica van die deeltjes successen boekt in de theorie van elektriciteit en in de fundamenten van de thermodynamica, hoe moet die denken over een mechanica van lichtdeeltjes?

1.4.4

Nieuwe ontdekkingen

Gedurende de laatste decennia van de 19de eeuw waren een aantal nieuwe ontdekkingen gedaan die dringend moesten ingepast worden in de bestaande fysica. Men moet zich immers niet voorstellen dat de typische fysicus rond 1900 er één was die diep zat na te denken over de theoretische fundamenten van zijn professie. De grote meerderheid waren experimentatoren die bezig waren met methodes van elektrische metingen, warmtefenomenen, spectroscopie (het ontleden volgens frequentie) en elektrische ontladingen in gassen.

Op het einde van 1895 ontdekte Wilhelm Röntgen de befaamde X-stralen (ook naar hem genoemd, Nobelprijs 1901). Radioactiviteit werd een jaar later ontdekt door Henri Becquerel (Nobelprijs 1903). Nog belangrijker voor onze doeleinden is het jaar 1897, het officiële 'geboortejaar' van het elektron.

Er waren reeds verschillende theoretische aanwijzingen voor het bestaan van dat eerste elementaire deeltje. De belangrijkste aanwijzing (vooral uitgewerkt door Lorentz) was het zogenaamde Zeemaneffect waar de invloed van een magnetisch veld een splitsing veroorzaakt in het spectrum van licht dat wordt uitgezonden door bepaalde gassen (Nobelprijs 1902). Het elektron werd tenslotte geïdentificeerd door Joseph Thomson en onmiddellijk verheven tot de universele bouwsteen van alle chemische elementen. Een eerste model voor het atoom werd gesuggereerd dat later via Ernest Ru-

therford en tenslotte dankzij Niels Bohr aanleiding zou geven tot de moderne atoomfysica.

Belangrijk voor de ontwikkeling van de ideeën van Einstein in 1905 was ook de ontwikkeling van een elektronentheorie voor metalen. Paul Drude (1863-1906) was hier de pionier. Hij combineerde de studie van optische, elektrische en thermische eigenschappen van metalen. Drude en anderen gebruikten daarvoor de kinetische gastheorie en gaven zo de aanzet tot verklaringen van de elektrische en thermische geleidbaarheid. Einstein was onder andere geraakt door het lezen (in 1901) van een artikel van Max Reinganum die hem overtuigde van de elektronentheorie als basis voor de geleidbaarheid in metalen. Daarin had Reinganum geschreven:

Het blijkt daarom... dat ook in metalen elektriciteit beweegt in discrete hoeveelheden met de grootte van elektrolytische ionen, en dat de principes van de gastheorie toepasbaar zijn op de massa's die bewegen met de ladingen.

Hoofdstuk 2

De nieuwe fysica van 1905

De onderwerpen van het wonderjaar

De artikelen uit 1905 zijn elk apart reeds wonderbaarlijk en hebben samen het aanschijn van de fysica veranderd. In die tijd werkte Einstein voltijds als technisch expert in een patentenbureau in Bern en was niet in onmiddellijk contact met de academische wereld.

Ik geef eerst de originele referenties met een toelichting over het hoofdonderwerp van deze publicaties. Daarna zal ik uitwijden over de drie grote thema's: fluctuatietheorie, fotonenhypothese en speciale relativiteitstheorie. Ik hou me daarbij niet strict aan de manier waarop Einstein die onderwerpen presenteert in 1905 maar ik probeer een beeld te geven van hoe we vandaag bepaalde redeneringen van Einstein kunnen reconstrueren. Hou echter toch in gedachten dat ik geen hedendaagse versie geef van de feiten — de gedachtengang van Einstein blijft het leidmotief. Het zal daarin voordelig zijn om heen en weer te lezen tussen de uitleg die straks volgt en de vertalingen in hoofdstuk 3.

Een storm brak in me los.

17 maart: “**Ueber einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt**” Annalen der Physik **17**, 132–148 (1905).

Einstein onderzoekt hier het fenomeen van de zwarte straling, zoals ingeleid in 1.3.5. Hij formuleert de zogenaamde fotonen-hypothese: de korreligheid van het licht. De energie van deze lichtkwanta is evenredig met de frequentie van het uitgezonden licht. Dat was revolutionair (ondanks de voorzichtige titel) omdat de klassieke theorie van het elektromagnetisme, gesteund op de vergelijkingen van Maxwell, aangenomen had dat elektromagnetische energie bestond uit golven die zich zouden voortplanten in een hypothetische alles doordringende ether, en dat die golven elke mogelijke hoeveelheid van energie konden bevatten, hoe klein ook.

Einstein gebruikt die kwantumhypothese, dat licht kan voorgesteld worden als discrete pakketjes straling, om onder andere het foto-elektrische effect te verklaren, waarin bepaalde metalen elektronen uitzenden wanneer ze door licht met een bepaalde frequentie worden bestraald, zie ook 1.3.6. Die theorie vormt de basis voor het begin van de kwantummechanica.

30 april: "**Eine neue Bestimming der Molecüldimensionen**" Doctoraatsthesis aan de universiteit van Zürich, gepubliceerd in 1906 in de Annalen der Physik.

Einstein geeft een methode om de afmeting van een molecule af te leiden en om te tellen hoeveel moleculen er in een bepaalde hoeveelheid stof aanwezig zijn. Dat is de bepaling van het getal van Avogadro N_A uit (1.2.2). Het sluit goed aan bij de volgende publicatie.

11 mei: "**Ueber die von molekülarkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierter Teilchen**" Annalen der Physik **17**, 549–560 (1905).

Einstein verklaart het fenomeen van de Brownse beweging, de zeer grillige, toevallig lijkende beweging van stofkorreltjes die zweven in een vloeistof, als een gevolg van de botsingen tussen de moleculen van de vloeistof en de deeltjes. Ook al is de impact telkens zeer klein, het netto of effectieve gevolg van het groot aantal botsin-

gen op het deeltje leidt tot beweging, die beschreven kan worden als een stochastische wandeling. Het deeltje maakt als het ware random verdeelde excursies. Toegepast op een wolkje van deeltjes, krijgen we een spreiding van de concentratie. Dat laatste wordt kwantitatief beschreven via een zogenaamde diffusieconstante die nu een kinetische interpretatie krijgt. Door een combinatie van die beschrijvingen, drukt Einstein de diffusieconstante uit in termen van eigenschappen van de botsende moleculen. De schijnbaar toevallige en zeer grillige beweging van de korreltjes in suspensie die vroeger onder de microscoop waren gezien, worden bedwongen in rigoureuze, zij het statistische wetmatigheden.

Op die manier geeft het artikel evidentie voor het fysisch bestaan van moleculen (een granulaire structuur op atomair niveau) wat reeds voorheen vooral theoretisch heftig werd bediscussieerd. Meer algemeen maakt het artikel een cruciale stap in de ontwikkeling van de dynamische fluctuatietheorie en van de statistische mechanica.

30 juni: "**Zur Elektrodynamik bewegter Körper**" Annalen der Physik **17**, 891–921 (1905).

Wanneer de speciale relativiteitstheorie in mij begon te rijpen, werd ik bezocht door allerhande nervositeiten... soms ging ik voor weken weg in een staat van verwarring.

In dat artikel geeft Einstein de speciale relativiteitstheorie. Einstein zelf was alleszins niet de eerste om de term *relativiteit* te gebruiken in de fysica. Hij beschouwde het zelf niet als een revolutie, *er is in de relativiteitstheorie geen sprake van een revolutionaire daad, maar van een natuurlijke ontwikkeling van een lijn die voor eeuwen is gevolgd.* In 1919 omschreef hij het als *gegroeid uit het elektromagnetisme van Maxwell en Lorentz als een verrassend eenvoudige samenvatting en veralgemening van vroegere onafhankelijke hypotheses.*

Einstein is ongeveer op de hoogte van de elektronentheorie van Lorentz maar neemt een nieuwe start. In tegenstelling tot zijn tijdgenoten neemt hij een radicaal nieuwe draad op; niet dynamica

maar kinematica is het eerste en cruciale gedeelte van zijn artikel. Hij start met twee postulaten. Het eerste is het relativiteitsprincipe. Dat blijft het relativiteitsprincipe van Galileo maar met nadruk bevestigd ook voor de wetten van de elektrodynamica en de optica. De wetten van de fysica moeten invariant zijn onder vertaling naar een referentiesysteem dat zich met constante snelheid verwijdert. Als een tweede fundamentele hypothese neemt Einstein aan dat de lichtsnelheid onafhankelijk is van de bewegingstoestand van de lichtbron.

Vanuit deze axioma's mediteert Einstein over de fundamentele relaties tussen tijd, lengte en snelheid. Het belangrijkste gevolg is een nieuwe kijk op tijd, niet langer absoluut maar samen met de ruimtelijke dimensies, relatief ten opzichte van de observeersituatie. Einstein (her)ontdekt het fenomeen van tijdsvertraging en lengtekrimp waarin tijd en lengte (net als massa) een functie zijn van de snelheid ten opzichte van een referentiestelsel en hij beschrijft de transformatieformules voor snelheden.

In het tweede deel leidt Einstein de transformaties af voor elektrische en magnetische velden. Net zoals ruimte-tijd worden ook elektriciteit en magnetisme verstrengeld en relatief ten opzichte van het referentiestelsel. Op die manier wordt het elektromagnetisme ontdaan van een asymmetrie tussen wat elektrisch en wat magnetisch heet als afhankelijk van de beweging. De vergelijkingen van Maxwell hebben wel dezelfde vorm in elk referentiestelsel en de bewegingsvergelijking voor geladen deeltjes in een magnetisch veld, eerst gepostuleerd door Lorentz, wordt nu afgeleid.

Dat werk is natuurlijk de voorloper van de algemene relativiteitstheorie. In deze laatste wordt een meetkundige gravitatietheorie geformuleerd die de theorie van Newton corrigeert en een hoeksteen is in het hedendaagse standaard-model van de fysische kosmologie.

27 september: "**Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?**" Annalen der Physik **18**, 639–641 (1905).

Einstein rapporteert daar over een merkwaardig gevolg van zijn speciale relativiteitstheorie: als een lichaam een bepaalde hoeveelheid energie uitzendt, moet de massa van dat object ook dalen met een zekere waarde.

Het relativiteitsprincipe in combinatie met de vergelijkingen van Maxwell vraagt dat de massa een directe maat is voor de energie bevat in lichamen; licht transfereert massa... Deze gedachte is amusant en besmettelijk, maar ik kan niet weten of de Heer God daar niet om lacht en me bij de neus neemt.

Einstein en vele anderen waren vlug overtuigd dat dit het goede pad was. De fundamentele relatie ziet men vaak afgedrukt als $E = mc^2$, misschien de beroemdste formule uit de geschiedenis.

2.1 Leidmotief

De artikelen van Einstein uit 1905 kunnen de indruk wekken dat het hier gaat om drie toch zeer afzonderlijke onderwerpen. Zelfs vandaag lijken de onderzoeksdomeinen van de statistische thermodynamica, de kwantumtheorie en de relativiteitstheorie dikwijls ver van elkaar te staan.[1] Meestal vinden we in tekstboeken en zelfs in wetenschappelijke biografische studies van het werk van Einstein afzonderlijke discussies over de drie hoofdonderwerpen uit 1905. Het is echter de moeite waard niet alleen de respectievelijke publicaties met hun afzonderlijke onderwerpen te duiden; ik wil ook een draad of logica suggereren die de artikelen en het hele onderzoeksprogramma van Einstein in 1905 zullen verbinden. Onze bewondering is dus niet zozeer een verwondering over de veelzijdigheid van de jonge Einstein, maar slaat eerder op de vastberadenheid en de intellectuele helderheid waarmee algemene principes tot hun logische conclusie worden gebracht. Het mirakel van 1905 is niet de veelheid maar de originaliteit in het doordenken en de synthese van de fysica van rond 1900.

[1] Er zijn belangrijke uitzonderingen. Een typisch voorbeeld waar die drie domeinen sterk (moeten) interageren is dat van de zwarte gaten.

Maar hoe kon zo'n mirakel uit zijn geest geboren worden? Deze vraag is... niet logisch, want als onze geest in het reine kon komen met die "hoe", dan zou het geen mirakel meer zijn. (Einstein over Newton, 1927)

Tussen 1902 en 1904 (Einstein was toen pas van de 'schoolbanken') schrijft hij drie artikelen over de fundamenten van de statistische mechanica van Boltzmann. Het doet me denken aan een citaat van Maxwell waarin hij beschrijft hoe zijn werk ontstond uit het verlangen vat te krijgen op het werk van Faraday over het elektromagnetische veld:

Daarom, de eerste processen in de effectieve studies van wetenschappen moeten simplificaties zijn en reducties van vorig onderzoek tot een vorm waarin het verstand ze kan vatten. (J.C. Maxwell over de veldlijnen van Faraday)

We zullen de statistische thermodynamica zien terugkeren in elk van de publicaties van Einstein uit 1905[2].

Het meest direct zie je het in het artikel over de Brownse beweging. Hier krijg je een synthese tussen thermodynamica en kinetische gastheorie. De argumentatie van Einstein wisselt tussen elementen van thermodynamica en de opkomende statistische mechanica.

In het artikel over de opwekking en transformatie van licht, formuleert Einstein de fotonenhypothese. De atoomhypothese, die de motivatie was voor het schrijven over wat nu Brownse beweging heet, wordt doorgetrokken tot op het niveau van licht waar fotonen de elementaire deeltjes van de elektromagnetische straling worden. De statistische fluctuatietheorie is zowel toepasbaar op korreltjes in een vloeistof als op lichtpakketjes in een stralingsveld. Bij Einstein wordt de idee van fotonen rechtstreeks gesuggereerd door een analogie met een entropie-berekening van Boltzmann voor deeltjes in een gas.

Het lijkt moeilijker om de statistische thermodynamica terug te

[2] De rol van de thermodynamica in het denken van Einstein werd reeds samengevat in M.J. Klein: Thermodynamics in Einstein's Thought, Science **157**, 509–516 (1967).

vinden in het artikel over de speciale relativiteitstheorie. Ik geloof dat hier vooral twee elementen kunnen worden aangebracht, methodologisch en thematisch. Het is interessant om Einstein zelf aan het woord te laten. In 1907 en op een vraag van Paul Ehrenfest om het "systeem" van de speciale relativiteitstheorie te gebruiken voor het elektronenprobleem, antwoordt Einstein:

Het relativiteitsprincipe, of beter gezegd, het relativiteitsprincipe samen met het principe van de invariantie van de lichtsnelheid, moet niet geïnterpreteerd worden als een "gesloten systeem," zelfs helemaal niet als een systeem, maar als een heuristisch principe dat, op zichzelf beschouwd, enkel beweringen over starre lichamen, klokken en lichtsignalen bevat. Alles daar voorbij, dat wordt verschaft door de relativiteitstheorie, bestaat uit verbanden tussen wetten die anders onafhankelijk van elkaar zouden lijken. ... Dus, we hebben hier helemaal niet te doen met een "systeem" waarin de individuele wetten impliciet bevat zijn en waaruit die zouden kunnen worden gededuceerd. Neen, het gaat hier enkel om een principe dat het mogelijk maakt bepaalde wetten tot andere te reduceren, analoog aan de tweede wet van de thermodynamica.

In zijn autobiografische notities merkt Einstein verder op dat hij wel gewild had om een unificerende microscopische theorie van mechanica en elektrodynamica te maken, maar dat het een te grote opgave bleek:

Meer en meer ging ik wanhopen over de mogelijkheid om de ware wetten te ontdekken door constructieve inspanningen gebaseerd op de gekende feiten. Hoe langer en hoe meer ik wanhopig probeerde, hoe sterker kwam de overtuiging dat slechts de ontdekking van een universeel principe ons kon leiden tot zekere resultaten.

Het model dat Einstein voor ogen hield voor zo een universeel principe was dat van de wetten van de thermodynamica. In de werken van Einstein zien we, in analogie met de statistische thermodynamica, een groot pragmatisme, waarbij concepten operationeel worden gedefinieerd en waarbij uit algemene principes dwingende relaties worden afgeleid voor de microscopische wereld. Ik heb reeds aangehaald in 1.2 hoe zeer hij onder de indruk was van de thermodynamica en, in 1.2.4, hoe zeer hij de statistische basis onderschreef.

Thematisch gesproken zijn er ook verschillende elementen. In het artikel over straling was de fotonenhypothese gegroeid. Net zoals beweging in vloeistoffen, of als beweging van elektriciteit in metalen, leek nu ook straling een voorwerp te kunnen worden van een veralgemeende kinetische gastheorie. Achteraf bekeken lijkt het logisch om dan de mechanica van fotonen te onderzoeken. Bovendien, uit thermodynamica hebben we eerst geleerd hoe verschillende vormen van energie in elkaar omgezet kunnen worden. In het bijzonder, hoe ook warmte een vorm is van energie en via de kinetische gastheorie kan verbonden worden met de beweging van de deeltjes in de materie. Als licht zowel als warmte nu gedragen wordt door deeltjes, lijkt een omzetting tussen massa en energie niet uitgesloten.

De inhoudelijke verbanden die hierboven gesuggereerd worden, geven toch een gefabriceerde indruk, als het ware gekunsteld vele jaren na de feiten. Bij mijn weten heeft Einstein daar zelf niet zo naar gerefereerd. Tenslotte is het elektromagnetisme, inhoudelijk het voornaamste vertrekpunt in het artikel over de speciale relativiteitstheorie, toch wel verschillend van de thermodynamica. We weten ook dat Einstein reeds op vroege leeftijd nadacht over elektrische en magnetische fenomenen en over de aard van licht, vroeger dan zijn liefde voor de statistische thermodynamica[3]. Dat zat in de familie, zo leert ons zijn biografie. Nochtans mogen we hier niet vergeten dat thermodynamica in die tijd een belangrijke inspiratiebron leverde voor het duiden van elektromagnetische fenomenen. Kelvin was de belangrijkste gids bij de start van de elektromagnetische studies van Maxwell en had meerdere keren analogieën gesuggereerd tussen warmtegeleiding en elektrostatica. Maxwell zelf is niet alleen grondlegger van het elektromagnetisme maar evengoed is hij pionier van de statistische thermodynamica. De grote verwezenlijkingen van Maxwell, unificatie van optica met elektromagnetisme, de uitbouw van kinetische gastheorie en de start van de statistische thermodynamica waren gebaseerd op het

[3]Het eerste wetenschappelijke essay van Einstein dateert van 1895 en is een brief naar zijn nonkel in Antwerpen. Het behandelt het probleem van de voortplanting van licht door de ether.

begrijpen van analogieën en verbanden tussen ogenschijnlijk afzonderlijke thema's. Hij sprak over "wederzijdse bevruchting" tussen de wetenschappen en riep het beeld op van bijen die van bloem tot bloem gaan. Ook Drude vindt zijn ideeën in de vereniging van elektromagnetisme en de kinetische gastheorie voor elektronen. De ultieme bron van deze verbanden is waarschijnlijk te vinden in die ingewikkelde relatie tussen wiskundige structuren en fysische realiteit. Het blijft merkwaardig hoe wiskunde kan leiden en verbanden suggereren.

2.2 Situering

In de volgende bladzijden komt een begeleidende tekst bij de 4 publicaties van Einstein uit 1905. Elk van de publicaties bespreekt en beantwoordt specifieke problemen terwijl ze ook samen staan voor een ruimer programma dat Einstein in latere jaren zal vervolgen (fluctuatietheorie, kwantum statistische mechanica en relativiteitstheorie). We kunnen ze ook op die manier indelen als behorende tot drie verschillende onderwerpen.

De bedoeling is stukken tekst en formules uit te leggen. Einstein schrijft weliswaar klaar en duidelijk maar bepaalde manieren van schrijven zijn, na 100 jaar, misschien toch wat vreemd geworden, zelfs voor de professioneel. Bovendien wil ik mij in de eerste plaats blijven richten tot de student en wil uitleg vooral aanmoediging zijn. Zo is het niet de bedoeling een gedetailleerde analyse te maken van de hoe's en de waarom's van Einstein's woorden. Historische context, verwijzingen naar of vergelijkingen met ander werk van Einstein en andere fysici zullen hier bijna niet aan bod komen[4].

De moeilijkheid blijft natuurlijk bestaan waar een uitleg begint en waar die eindigt. Voor algemeenheden en een eerste situering van de onderwerpen kunnen we terugvallen op hoofdstuk I. Deze ach-

[4] Dat is trouwens op veel andere plaatsen te vinden, bijvoorbeeld in de *Collected Works*.

tergrond bij de fysica van rond 1900 moet helpen. Nu wordt het echter concreter. De tekst van Einstein zal ons leiden en het volgende zijn vooral samenvattingen in een wat modernere taal, met hier en daar een opmerking. Daarin ben ik echter selectief; niet alles komt ter sprake of ik stap vlug over zaken waarvan ik denk dat ze voor onze doeleinden minder relevant zijn.

Een andere (hopelijk minder belangrijke) moeilijkheid is de notatie. Einstein gebruikt niet dezelfde notatie voor dezelfde dingen in zijn verschillende publicaties. Daarbij komt dat ik reeds een bepaalde notatie heb gekozen voor de uitleg in hoofdstuk I. Ik zal deze notatie verder consistent gebruiken en apart een "vertaling" van de notatie bijvoegen waar dat handig kan zijn.

2.3 Fotonen-artikel

De fotonen-hypothese van Einstein is een herhaling van de atoomhypothese van Boltzmann maar voor licht en was geheel afwijkend van de opvattingen in die tijd. Het voorstel van Einstein, eerst geschreven in de context van het probleem van de zwarte staling, is dat het elektromagnetische veld niet "enkel" het continuum kan zijn van Maxwell maar zelf, onder specifieke omstandigheden, een deeltjeskarakter moet hebben. Dat was revolutionair. Sinds het werk van Maxwell was licht pas goed begrepen als een golfverschijnsel en de eigenschappen van licht (zoals voortplanting, uitbreiding, interferentie, buiging en polarisatie) waren precies op het golfkarakter gebaseerd.

Einstein besefte goed dat het gezichtspunt dat licht bestaat uit deeltjes (fotonen) radicaal verschilde van wat algemeen gangbaar was en inderdaad, deze kwantumhypothese werd in de daaropvolgende jaren ofwel genegeerd ofwel ontkend. In 1913 schreven Planck en anderen nog over Einstein dat *hij misschien soms het doel heeft gemist in zijn speculatie, zoals, bijvoorbeeld, in zijn hypothese van lichtkwanta.* Nochtans had Einstein in zijn artikel uit 1905 niet nagelaten om concrete experimenten aan zijn hypothese

te koppelen. Het waren tenslotte die toepassingen die het grote succes verzekerden. Het meest beroemd is het foto-elektrische effect van paragraaf 1.3.6 en waarvoor Einstein de Nobelprijs van 1921 kreeg.

Over een heuristisch gezichtspunt...

Einstein begint met een grote ouverture. Hij wijst naar het onderscheid tussen de mechanica van massadeeltjes en in het bijzonder de kinetische gastheorie en de theorie van Maxwell over het elektromagnetisme. *Er bestaat een diepliggend formeel verschil...* Enerzijds is er het discrete, de atomen en elektronen wiens toestand bepaald is door posities en snelheden, en anderzijds is er het continuum, het elektromagnetische veld met energie die zich continu over de ruimte verspreidt.

Bemerk ook de voorzichtige titel, *een heuristisch gezichtspunt.* De theorie van Maxwel en het begrijpen van licht als een elektromagnetische golf was nog tamelijk jong en veelgeprezen. De theorie van Maxwell sloot naadloos aan bij de vele experimenten uit de 19de eeuw die het golfkarakter van het licht hadden bevestigd. *De golftheorie van het licht...zal wel nooit door een andere theorie vervangen worden.* Dan komt de voorzichtige suggestie, *Men moet echter wel voor ogen houden....* Einstein suggereert dat misschien bij *verschijnselen van de opwekking en omvorming van licht* het nuttig is te stellen dat *de energie van licht discontinu in de ruimte verdeeld is.*

2.3.1

Over een moeilijkheid...

Op het einde van de 19de eeuw dachten natuurkundigen wel eens dat ook het einde van de natuurkunde in zicht was. Het klassieke wereldbeeld was gevormd, kende grote successen en het leek alsof met voldoende geduld en rekenwerk alles kon gezegd worden over wat de fysische wereld behelsde. Er waren wel nog wat donkere wolken maar er werd op gerekend dat die snel van de einder zou-

den verdwijnen. Dat gebeurde niet.

Er zijn experimentele redenen die ons laten verstaan dat de klassieke natuurkunde niet het laatste woord kan hebben in de beschrijving van de wereld. Vooral in fenomenen waarbij materie en licht interageren, werden rond 1900 fundamentele problemen opgemerkt. Het zogenaamde stralingsprobleem, in verband met de productie en omzettingen van elektromagnetische straling, zal de wereld van de fysici sterk bezighouden bij het onstaan van de moderne fysica. Een beroemd voorbeeld is dat van de zwarte straling uit 1.3.5.

Bij opwarming gaan voorwerpen een bepaalde kleur vertonen. Denk aan een verhit metaal. Dat zendt elektromagnetische straling uit. Verhogen we de temperatuur, dan wordt het rood, dan geel en dan komt een blauw-witte gloed. Een vraag uit de fysica is hoe de intensiteit van de straling zich verdeelt over het spectrum van de verschillende golflengten (dat zijn de kleuren) en hoe dat alles verandert met de temperatuur. Er is een ideale situatie, dat van de zwarte straler, waarvoor er op het einde van de 19de eeuw duidelijke experimentele vaststellingen werden gedaan. De klassieke natuurkunde bleek niet in staat om die experimentele gegevens, samengevat in (1.3.1) te verklaren. Erger nog, de theoretische voorspellingen waren absurd. Het leek alsof de grote frequenties moesten gaan lopen met alle energie. Dat is wat Einstein uitlegt in zijn §1. Je kan het als volgt begrijpen.

Elektromagnetische straling in de holte van een zwarte straler is in de theorie van Maxwell beschreven als trillingen. In evenwicht bij temperatuur T is er een voortdurende uitwisseling van energie tussen de materiedeeltjes in de wand en de straling binnenin. We kunnen denken aan staande golven zoals we ze kunnen krijgen in een snaar of in een stukje touw. Nog beter is het te denken aan de trillingen van het vel van een trommel want dat is al tweedimensionaal. Voor de zwarte straling hebben we staande golven in drie dimensies. Zoals in muziek worden die trillingen beschreven door noten. Eén bepaalde energiewaarde komt overeen met mogelijks zeer verschillende trillingswijzen. In de fysica spreekt men over

modes en in ons geval worden die gekarakteriseerd door drie gehele getallen overeenkomstig de trillingen in drie dimensies. Ken je de trillingsmanieren, een drietal dus, dan ken je ook de frequentie ν van de straling. Anderzijds, elk drietal geeft ons een trilingsmanier of ook, een vrijheidsgraad. Over vrijheidsgraden hadden we het in 1.2.4 toen het equipartitiebeginsel ter sprake kwam. De vuistregel is dat de energie gelijk is aan $k_B T/2$ maal het aantal vrijheidsgraden. Einstein legt hiervoor de nadruk op de eis van dynamisch evenwicht tussen de resonatoren, dat zijn de deeltjes in de wand, en de straling. Onder dat principe kunnen we nu eenvoudig de energiedichtheid berekenen rond een bepaalde frequentie ν, voorheen genoteerd met $e(T,\nu)$. Al wat we moeten doen, is tellen hoeveel modes van trillingen er zijn rond frequentie ν. Stellen we dat aantal voorlopig voor door de letters $n(\nu)$, dan zal

$$e(T,\nu) \sim k_B T\, n(\nu)$$

Ik wil hier niet insisteren op de correcte voorfactoren omdat ik het begrip vrijheidsgraad toch niet precies gedefinieerd heb, maar de idee moet duidelijk zijn. Dat aantal $n(\nu)$, het aantal manieren waarop een frequentie gerealiseerd kan worden door de driedimensionele trillingen, kan berekend worden. Het belangrijkste resultaat is dat “hogere noten” op meer manieren kunnen bereikt worden:

$$n(\nu) \sim \nu^2$$

en dus: $e(T,\nu) \sim k_B T\, \nu^2$.
Einstein geeft[5] in zijn eerste paragraaf ook de correcte voorfactoren bij dergelijke analyse:

$$e(\mathbf{T},\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, k_B T \qquad (2.3.1)$$

Nu komt het probleem goed in zicht. Ehrenfest, student van Boltzmann, noemde het de ultraviolet-katastrofe. Einstein wijst op het feit dat de grote frequenties “teveel” energie krijgen en wel zo dat

[5]Notatie: Einstein gebruikt ρ_ν voor onze $e(T,\nu)$. In plaats van c gebruikt hij L als notatie voor de lichtsnelheid en de constante van Boltzmann verschijnt verdoken in de vorm $R/N = k_B$, zoals we het schreven in formule (1.2.2) maar met het getal van Avogadro genoteerd met N.

de totale energiedichtheid; dat is, de integraal van (2.3.1) over ν divergeert. Dat kan natuurlijk niet.

2.3.2

Over de bepaling van de elementaire kwanta...

De eerste formule in §2 van het fotonen-artikel is de vergelijking van Planck, onze (1.3.1), maar de notatie verschilt lichtjes. De vertaling is

$$\alpha = \frac{8\pi h}{c^3}, \quad \beta = \frac{h}{k_B}$$

Einstein geeft in eerste instantie die vertaling door te vergelijken met de formule (2.3.1) voor kleine frequenties. De formule van Planck (1.3.1), voor kleine frequenties of beter, voor $h\nu \lll k_B T$ gaat over in (2.3.1). In het bijzonder volgt de formule voor de constante van Avogadro $N = N_A = R/k_B$, zoals onder (1.2.2).

Allemaal goed en wel maar de formule (2.3.1) *schiet volledig te kort voor kleine golflengten* (grote frequenties). Voor grote frequenties loopt het hopeloos verkeerd. Volgens de vorige redenering met conclusie (2.3.1) zou bijna alle energie geconcentreerd zijn in de hogere frequenties en dat klopt niet met het experimentele resultaat zoals samengevat in (1.3.1).

2.3.3

Geschiedenis

Max Planck, de ontdekker van de correcte stralingswet, beschreef zijn ontrafeling van het probleem van de zwarte straling als volgt:

Maar de enige manier om in te zien hoe dat gedaan kan worden, is te starten vanuit een welbepaald gezichtspunt. Deze aanpak werd voor mij geopend door de twee wetten van de thermodynamica aan te houden. De twee wetten, zo lijkt me, moeten onder alle omstandigheden geldig blijven. Voor de rest was ik bereid al mijn vroegere

opvattingen over fysische wetten op te offeren. Boltzmann had uitgelegd hoe thermodynamisch evenwicht ingesteld wordt door middel van een statistisch evenwicht. Als zo een aanpak wordt toegepast op het evenwicht tussen materie en straling, vindt men dat het continue verlies van energie in de straling kan worden voorkomen door aan te nemen dat energie vanaf het begin gedwongen wordt samen te blijven in bepaalde kwanta.

Dat werd geschreven in 1931, vele jaren na de feiten. Ik kan me niet van de indruk ontdoen dat de woorden van Einstein hier doorklinken. Dit was alleszins de strategie van zijn artikel uit 1905.

Einstein beschouwde in 1905 zijn werk over kwanta belangrijker dan dit over de speciale relativiteitstheorie. Terwijl Planck zichzelf dikwijls een revolutionair beschouwde tegen zijn eigen wil in, bekende Einstein zijn werk over fotonen als *zeer revolutionair* en het lijkt me gepast het te beschouwen als de "werkelijke" start van de kwantumtheorie[6].

De benadering van Einstein verschilde conceptueel grondig van die van Planck en Einstein gebruikte ook de stralingswet van Planck niet. Ik zal die dan ook niet verder bespreken. Einstein concentreerde zich op het experimenteel gedeelte van de stralingswet dat in grondige contradictie was met de klassieke berekeningen. Het probleem was dus de verkeerde (klassieke) voorspelling voor de intensiteiten van de kleuren met hoge frequenties die worden uitgestraald door verwarmde voorwerpen.

De belangrijkste oorzaak van dat probleem was het klassiek samendenken van twee verschillende fysische objecten: deeljes die elk beschreven worden met posities en impulsen (een eindig aantal vrijheidsgraden) en het elektromagnetische veld, een continuum waarvoor een oneindig aantal parameters nodig zijn. Wanneer er dan evenwicht wordt ingesteld, zal alle energie opgeslagen worden in het veld. Dat komt omdat evenwicht de toestand is met maximale entropie maar er is zoveel meer opslagruimte (vrijheid) in het

[6]Het boek *Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity, 1894-1912* uit 1978 van T.S. Kuhn is een uitgebreid werk over het onderzoeksprogramma van Planck en de ontstaansgeschiedenis van de eerste kwantumtheorie.

veld. Vooral bij hoge frequenties, krijgen de deeltjes bijna niets meer en zal alle energie bij steeds hogere frequenties gestockeerd worden.

2.3.4

Stralingsentropie

De redenering van Einstein in zijn paragrafen §3.–§4. kan als volgt worden samengevat.

Hij gaat uit van het experimentele gedeelte van de stralingswet dat theoretisch onbegrepen bleef; het gebied van hoge frequentie. Daarvoor kijken we terug naar de formule van Planck (1.3.1) voor de zwarte straling. Wanneer $h\nu/k_B T \ggg 1$ groot is, grote frequenties, krijgen we de zogenaamde wet van Wien, dat is

$$e(T,\nu) \simeq \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\, e^{-h\nu/k_B T} \tag{2.3.2}$$

Einstein kijkt dus niet langer naar (2.3.1), het beter-begrepen gedeelte van de verdeling van Planck.
De hoofdvraag die hij stelt, is wat nodig is om tegelijk die experimentele wet te bekomen en toch vast te blijven houden aan het beeld van Boltzmann waar evenwicht gekarakteriseerd wordt door maximale entropie. Er komt daarom een nieuwe speler op het toneel, de stralingsentropie. Einstein schrijft de totale entropie

$$S_{\text{tot}} = V \int_0^{+\infty} s(\nu,e)d\nu \tag{2.3.3}$$

als een som (of integraal) van bijdrages van entropiedichtheden $s(\nu,e)$ horende bij een bepaalde frequentie ν en energiedichtheid $e = e(T,\nu)$. Nu zijn we in staat om deze entropiedichtheid te berekenen via de formule (1.2.11). Ik werk schematisch:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta s(\nu,e)}{\Delta e(T,\nu)} \tag{2.3.4}$$

laat ons toe om de entropiedichtheid $s(\nu,e)$ te berekenen uit de formule (2.3.2). Het resultaat is

$$s(\nu,e) = -\frac{k_B e}{h\nu}\big(\log\frac{c^3 e}{4h\nu^3} - 1\big) \tag{2.3.5}$$

De stralingsentropie in volume V is $S = Vs$ gegeven door

$$S = S(\nu, E, V) = -\frac{k_B E}{h\nu}\big(\log \frac{c^3 E}{4h\nu^3 V} - 1\big)$$

waarin $E = E(T, \nu) = Ve$ de energie in de holte voorstelt bij frequentie ν. Vergelijken met de entropie voor deelvolume V_0 krijgen we daaruit als verschil

$$S - S_0 = \frac{k_B E}{h\nu} \log \frac{V}{V_0} \tag{2.3.6}$$

De afleiding van (2.3.6) is dus thermodynamisch.

Notatie: Om de vertaling te vervolledigen, wil opmerken dat de dichtheid aan stralingsentropie door Einstein genoteerd wordt als $\varphi(\rho, \nu)$. De laatste formule in zijn §3

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{T}$$

is onze (2.3.4). In zijn §4 begint Einstein met de startformule (2.3.2) en hij eindigt met (2.3.6). Herinner dat bij Einstein $\beta = h/k_B$.

2.3.5

Interpretatie

Tot dusver is dat slimme thermodynamica. Nu komt het geniale uitbuiten van een analogie.

Einstein start met een uitleg over het verband tussen waarschijnlijkheid en entropie zoals geleerd door Boltzmann. Wij hebben die gehad onder paragraaf 1.2.4. De entropie van een ideaal gas is berekend met resultaat (1.2.16). Einstein herhaalt in zijn §5 de kansbeschouwingen van Boltzmann waarmee je kan berekenen wat de kans is dat alle gasdeeltjes in één hoek van een container kruipen. Kans is direct verbonden met entropie, dat is de formule van Boltzmann (1.2.14). Als je N deeltjes hebt in een volume V kunnen ze elk (min of meer) vrij een positie innemen. Dat geeft je

als entropie $S = k_B N \log V$, de eerste term in (1.2.16). Wanneer ze zich alle in een deelvolume V_0 zetten, krijg je een verandering van entropie ter grootte

$$S - S_0 = N k_B \log \frac{V}{V_0} \tag{2.3.7}$$

consistent met (1.2.16).

<u>Notatie:</u> De slotformule in §5

$$S - S_0 = R \frac{n}{N} \log \frac{V}{V_0}$$

voor de verandering ΔS van entropie in een ideaal gas bij verandering van volume V naar V_0, is identiek aan onze formule (1.2.17) voor vaste energie $E, \Delta E = 0$, of aan (2.3.7). Natuurlijk is er weer de vertaling ten opzichte van (1.2.17): bij Einstein is $N = N_A$, het getal van Avogadro, en onze N is de n van Einstein, het aantal deeltjes. Verder is nog altijd $k_B = R/N_A$.

In §6 krijgen we de synthese van Einstein. Einstein vergelijkt de uitdrukking voor de afhankelijkheid van de stralingsentropie van het volume met deze voor het ideale gas. Dat is het vergelijken van onze formules (2.3.7) en (2.3.6). Wat blijkt: *dat de entropie van monochromatische straling met voldoende kleine dichtheid varieert met het volume als de entropie van een ideaal gas of een verdunde oplossing.* Einstein benadrukt dat (2.3.6) identiek wordt aan (2.3.7) wanneer de energie E afhangt van de frequentie ν volgens

$$E = N\, h\nu$$

De N is hier een geheel getal dat vanzelfsprekend nu het aantal lichtkwanta moet voorstellen met frequentie ν. Door deze analogie met een vertrouwde statistisch mechanische berekening voor niet-interagerende deeltjes komt hij dus tot de hypothese dat straling zelf een discrete of granulaire structuur heeft[7]. Hij besluit[8] dat

[7] Het woord foton voor die lichtpakketjes werd pas gelanceerd in 1926 door de Amerikaanse scheikundige Gilbert Lewis.

[8] De formule van Boltzmann (1.2.14) kan van twee kanten worden gelezen.

binnen de geldigheidsregime van de wet van Wien monochromatische straling, dat is straling van één bepaalde kleur of frequentie, zich gedraagt in *verband met de theorie van de warmte alsof ze zou bestaan uit van elkaar onafhankelijke energiekwanta van de grootte* $h\nu$.

Het is interessant op te merken dat Einstein in zijn fotonen-artikel twee keer allusie schijnt te maken op wat ook komt in zijn artikel over Brownse beweging. In zijn §4. laat hij het onderscheid vervagen tussen een ideaal gas en een verdunde oplossing. In de twee eerste paragrafen van zijn artikel over Brownse beweging zal hij inderdaad tonen hoe de kinetische gastheorie in beide gevallen toepasbaar is voor de theorie van osmotische druk.

In de laatste zinnen van zijn §5. merkt Einstein nog op hoe je uit de entropie-vergelijkingen de ideale gaswet (1.2.1) kan afleiden en opnieuw maakt hij referentie naar de wet voor de osmotische druk.

Einstein berekent nog wat de gemiddelde grootte is van het energiekwantum volgens de verdelingsformule (2.3.2) van Wien. Hij neemt daarvoor de totale energie gedeeld door het gemiddeld aantal deeltjes. We doen het in onze notatie:

$$\frac{\int_0^{+\infty} e(T,\nu)d\nu}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{h\nu}e(T,\nu)d\nu} = 3k_BT \tag{2.3.8}$$

waar ik voor $e(T,\nu)$ de formule (2.3.2) heb gebruikt. Einstein merkt op dat er een verschil is met de gemiddelde energie voor een ideaal gas. Het resultaat daarvoor werd gegeven in (1.2.12) of kan ook berekend worden via (1.2.13), en verschilt een factor 1/2 met (2.3.8). Einstein weet het hier waarschijnlijk nog niet maar die factor 1/2 heeft alles te maken met de speciale relativiteitstheorie. De relatie tussen kinetische energie en impuls is anders voor fotonen (die bewegen met de lichtsnelheid) dan voor niet-relativistisch

Ofwel bereken je de thermodynamische entropie S uit gegevens of aannames over de microscopische structuur die W bepalen. Dat was de traditionele kijk. Ofwel vertrek je van de thermodynamische entropie S en vind je dus W. Die bevat informatie omtrent aspecten van de microscopische structuur. De vraag is dan "welke manier van tellen" leidt via W in (1.2.14) tot de gegeven veronderstelde S. Dat laatste is de strategie van Einstein.

bewegende materiële deeltjes.

2.3.6 Regel van Stokes

Best zal Einstein zijn “gezichtspunt” met oplossingen of voorspellingen over concrete feiten aanvullen. Dat is wat hij doet in de laatste drie paragrafen van zijn fotonen-artikel. Er rest hem alleen nog de fotonen-hypothese letterlijk te nemen en te zien, in andere omstandigheden, wat de gevolgen zouden zijn.

De eerste toepassing is de omzetting van monochromatisch licht, door fotoluminiscentie, in licht van een andere frequentie. Luminiscentie betekent letterlijk “lichte gloed” of “zwak licht” en die term wordt, eerst sinds 1888 door Wiedemann, gebruikt voor verschijnselen waarin licht wordt opgewekt door bijvoorbeeld warmte of bestraling. Fotoluminiscentie slaat op het beschijnen van een stof waarna die zelf weer licht uitzendt.

In 1852 ontdekte Stokes een wetmatigheid, dat het licht dat de stof verlaat een grotere golflengte heeft dan het binnenkomende licht[9]. Einstein legt uit.

Wat ook de tussenprocessen zijn die plaatsvinden als licht wordt geabsorbeerd en daarna weer uitgezonden, het principe van behoud van energie moet gelden. Een binnenkomend lichtkwantum draagt een energie $h\nu_1$. Misschien wordt die energie gedeeltelijk omgezet in een andere vorm van energie bij absorptie maar als door de absorptie geen andere — in de stof gevangen — energie kan vrijkomen, zal de energie $h\nu_2$ van het uitgezonden lichtkwantum niet groter zijn dan de energie die binnenkomt. Met andere woorden, $h\nu_1 \geq h\nu_2$ of

$$\nu_2 \leq \nu_1$$

de zogenaamde regel van Stokes. Bovendien, vermits dat reeds geldt voor 1 ingezonden lichtkwantum, zal er geen benedengrens

[9] Dat is echter niet altijd geldig — we spreken dan over anti-Stokes gedrag.

zijn voor de intensiteit van het ingezonden licht waaronder geen licht zou opgewekt worden.

Einstein haast zich expliciet de voorwaarden te herhalen waaronder dat alles geldt. Eerst en vooral moet het zo zijn dat het opgewekte lichtkwantum niet ontstaat (gelijktijdig zijn energie krijgt) van meerdere invallende lichtkwanta. Ten tweede moet het invallende licht van die aard zijn dat aan de voorwaarden van de wet van Wien voldaan is. Het moet een zwarte straler zijn binnen het geldigheidsgebied van (2.3.2).

2.3.7

Foto-elektrische effect

Wanneer licht van een bepaalde frequentie (kleur) op een metaaloppervlak valt, dan treden er elektronen uit met een bepaalde snelheid. Dit gebeurt echter niet zomaar, zelfs als men de intensiteit van het licht vergroot. Het gebeurt enkel wanneer de frequentie groot genoeg is. Dat is precies wat de theorie van Einstein voorspelt. Elk foton draagt een energie die evenredig is met de frequentie en slechts als die energie groot genoeg is, kan die een elektron uit het metaal bevrijden. Als de intensiteit dan wordt vergroot, worden er meer elektronen uitgestoten maar hun energie blijft onveranderd. In 1905 was dat nog een mysterie: hoe kon het zijn dat licht van grote intensiteit maar met kleine frequentie geen elektronen kan losmaken en licht met lage intensiteit maar hoge frequentie wel? Einstein vermeldt het werk van Lenard waarin het probleem, dat ik reeds heb beschreven in 1.3.6, scherp werd gesteld.

De ideeën van Einstein hebben die puzzel opgelost en een exacte formule voorspelt wat de kinetische energie van de uitgestoten elektronen zou zijn. Hij neemt aan, voor de eenvoud, dat een lichtkwantum zijn hele energie afgeeft aan één enkel elektron in de oppervlaktelaag van het metaal. Het elektron krijgt daardoor energie die gedeeltelijk gebruikt wordt om zich uit het oppervlak te "bevrijden" en gedeeltelijk wordt omgezet in kinetische energie.

De kinetische energie van het elektron is dus

$$K = h\nu - W_o \tag{2.3.9}$$

waarin W_o (Einstein schrijft P) de arbeid is die geleverd wordt door het elektron en karakteristiek is voor het metaal. Je zou kunnen zeggen dat W_o een functie is van de eigenschappen van het metaal en staat voor de energie nodig om het elektron van het metaaloppervlak te bevrijden.

Einstein schrijft (2.3.9) verder om naar de experimentele situatie waarin via een elektrische potentiaal de elektronenstroom wordt tegengehouden. De stoppotentiaal is deze waarde voor de spanning van de batterij die de elektronen net verhindert het metaal te verlaten. Einstein vult concrete getallen in in de formules en checkt dat de resultaten overeenstemmen, naar orde van grootte, met wat reeds door Lenard gemeten was.

De formules voorspellen echter nog meer, de preciese afhankelijkheid van de stoppotentiaal als functie van de frequentie. De K uit formule (2.3.9) is evenredig met die stoppotentiaal en de voorfactor bij de afhankelijkheid van de frequentie is een constante, onafhankelijk van de eigenschappen van het metaal. Dat is belangrijk en concreet nieuws en nodigt uit tot nieuwe experimenten. Nog niemand had die relatie opgemeten en Einstein geeft dus een onmiddellijk meetbare voorspelling plus een manier om de constante van Planck te meten. In 1916 schreef Millikan: *de vergelijking van Einstein voor het foto-elektrische effect is onderworpen aan zeer strenge testen en ze blijkt in ieder geval exact de waargenomen resultaten te voorspellen.*

Tenslotte schrijft Einstein op het einde van zijn §8 ook kort over het omgekeerde proces, de zogenaamde kathodeluminiscentie waarin elektronen op het metaal worden geschoten en lichtkwanta vrijmaken. Dezelfde beschouwingen blijven gelden maar hier blijkt dat de kinetische energie van één elektron vele lichtkwanta kan verwekken.

2.3.8

Over de ionisatie...

Ik kom aan de laatste paragraaf §9 van het fotonen-artikel.
Licht laten inschijnen op gassen kan de gasmoleculen ioniseren. Dat is de molecule laten splitsen in positief en negatief geladen deeltjes (ionen), bijvoorbeeld door een elektron te onttrekken. Opnieuw gebruikt Einstein de idee dat een geabsorbeerd lichtkwantum de energie brengt om een molecule te splitsen en dat dus moet

$$N_A h\nu \geq J$$

waarin J de ionisatiearbeid is per mol gas. Lenard had in 1903 vastgesteld dat er een minimale frequentie nodig was ter ionisatie van lucht, namelijk $\nu = 1.58 \times 10^{15}$ per seconde. Je zou dus zeggen dat de ionisatiearbeid J voor een mol lucht hoogstens $N_A h\nu = 6.02 \times 10^{23} \times 6.63 \times 10^{-34} \times 1.58 \times 10^{15} = 6.3 \times 10^5$ Joule moet bedragen[10]. Anderzijds had Stark gemeten dat men minstens een spanning van 10 Volt nodig heeft om lucht te ioniseren, wat ook de afstand is tussen de elektroden. We moeten dan de lading van het elektron vermenigvuldigen met die 10 Volt om de arbeid te krijgen en nog eens maal 6.02×10^{23} om de ionisatiearbeid voor één mol te hebben. Dat geeft $J = 9.6 \times 10^5$ Joule en is dus qua grootte-orde consistent met de waarde van Lenard, wanneer geïnterpreteerd met de fotonen-hypothese.

Einstein eindigt zijn artikel met een relatie tussen de totale hoeveelheid geabsorbeerde lichtenergie en de hoeveelheid geioniseerde moleculen, wanneer elk geabsorbeerd lichtkwantum één molecule ioniseert. De verhouding moet altijd evenredig zijn met de frequentie van het ingezonden licht want de totale lichtenergie moet gewoon gedeeld worden door $h\nu$, de energie van één lichtkwantum, om te weten hoeveel lichtkwanta er geabsorbeerd en dus hoeveel gasmoleculen er geïoniseerd worden.

[10]Einstein gebruikt *erg* als energie-eenheid. Een erg is een enigszins in onbruik geraakte eenheid ter grootte van 10^{-7} Joule. Eén Joule (= $kg\ m/s^2$ is 0.239 calorie, of is ongeveer de arbeid die we moeten verrichten om 1 kg massa op aarde 10 cm hoger te tillen.

2.4 Het artikel over de Brownse beweging

Over de beweging van deeltjes...

Einstein duidt al in de eerste lijnen zijn onderwerp en het zal spannend worden. Het gaat over iets heel concreet: bewegingen van deeltjes die in een vloeistof hangen. Er staat echter veel op het spel: de kwantitatieve voorspelling van de beweging van die deeltjes als gevolg van de moleculaire warmtebeweging zal beslissen over het lot van de kinetische gastheorie.

2.4.1 Over de osmotische druk

De eerste twee paragrafen van het artikel gaan over het fenomeen van osmose en willen een uitdrukking geven voor de osmotische druk als gesteund op de kinetische gastheorie.

Osmose treedt op wanneer we bijvoorbeeld een recipiënt suikerwater nemen en dat in een vat water zetten. We nemen een recipiënt waarvan de wanden wel het water maar niet de daarin opgeloste suiker doorlaten. Het is een semipermeabele of half-doorlaatbare wand. Wat gebeurt, is dat er meer en meer water in het recipiënt zal vloeien. Dat stopt op een bepaald moment door de druk die wordt uitgeoefend door het binnenkomende water. Osmotische druk is net die druk die dat evenwicht karakteriseert. Die osmotische druk treedt telkens op wanneer een oplossing gescheiden is van de pure vloeistof door een semipermeabele wand. Osmose en de waardes van de osmotische druk zijn letterlijk van vitaal belang in de mechanismen van het leven van planten en dieren.

Jacob van 't Hoff heeft in 1887 beschreven hoe die osmotische druk kon berekend worden. Hij gebruikt daarbij een analogie met het ideale gas. Van 't Hoff bewees dat de thermodynamische wetten

niet enkel gelden voor gassen maaar ook voor verdunde oplossingen[11]: de osmotische druk van een verdunde oplossing is gelijk aan de druk uitgeoefend door een ideaal gas op dezelfde temperatuur die hetzelfde volume inneemt als de oplossing en die hetzelfde aantal molen bevat als de opgeloste stof. De osmotische druk voor een verdunde oplossing is dan gewoon gegeven door de ideale gaswet. De moleculen van de oplossing zijn een "gas" die bewegen doorheen het medium "oplossing." Wanneer we bijvoorbeeld 1 mol sucrose oplossen in 1 liter water bij 25 graden Celsius, krijgen we een osmotische druk gelijk aan

$$P = RT/V = 8.32 \times 298 \times 10^{-3} \frac{kg}{s^2 m} = 24.5 \text{ atmosfeer}$$

net als volgens (1.2.1). Er zijn echter uitzonderingen. De meest belangrijke uitzondering is dat van een elektrolyt. Wanneer bijvoorbeeld NaCl (zout) wordt opgelost in water, dissocieren bijna alle NaCl-moleculen in positieve Na-ionen en negatieve Cl-ionen. Het aantal deeltjes in de oplossing is dus bijna 2 keer zo groot als dat men zou verwachten wanneer geen dissociatie plaatsvindt.

Einstein vermeldt het werk van van 't Hoff niet. Hij herhaalt het voor een deel maar veel sterker gebaseerd op de kinetische gastheorie.

De equivalentie tussen de osmotische druk en de druk van een ideaal gas kan gemakkelijk begrepen worden uit het kinetisch gasmodel van Bernoulli voor de druk, zie paragraaf 1.1.6. Wanneer we met een semipermeabel membraan twee reservoirs scheiden waarin telkens het pure oplosmiddel zit, zal de druk aan beide zijden van het membraan identiek zijn. Als we nu een stof oplossen in één van de reservoirs, zal de druk op het membraan aan die kant toenemen door de botsingen van de opgeloste deeltjes. Die deeltjes kunnen niet door het membraan bewegen en botsen er voortdurend tegen met een hevigheid gedicteerd door de temperatuur van de vloeistof. Hoe meer opgeloste deeltjes en hoe hoger de temperatuur, hoe hoger de osmotische druk. Er moet nu natuurlijk nog getoond worden dat de snelheden van de opgeloste deeltjes niet beïnvloed

[11] en kreeg de eerste Nobelprijs scheikunde 1901.

worden door het feit dat ze “in oplossing” zijn.

Einstein begint met de opmerking dat volgens de kinetische gastheorie *een opgeloste molecule enkel en alleen van een lichaam in suspensie [verschilt] door de grootte.* Ook deeltjes in suspensie zullen een druk uitoefenen en wel zo dat als (in de notatie van Einstein) ν de dichtheid is van de lichamen in suspensie, hen — analoog — een osmotische druk ter grootte

$$P = k_B T \nu$$

toekomt. Einstein toont hoe die laatste formule verkregen kan worden uit de kinetische gastheorie. Eigenlijk doet hij hier niet veel meer dan wat hij al gedaan had in §5. van zijn fotonen-artikel. Daarin had hij bovendien in een voetnoot uitgeschreven hoe je de ideale gaswet kan terugvinden uit de uitdrukking voor de entropie. Einstein herhaalt hier essentieel die afleiding maar nu voor het deelvolume $V^\star$ waarin de deeltjes zich in suspensie bevinden. Nu dat van de baan is, kan het echte werk beginnen.

2.4.2 Brownse beweging

De kinetische gastheorie en de thermodynamica liepen rond 1905 nog een goed stuk door elkaar. Einstein (die wellicht niet op de hoogte was van het werk van Gibbs) breidt het werk van Boltzmann uit en gaat op zoek naar tastbare of zichtbare gevolgen van de onderliggende principes en statistische redeneringen. Einstein stelt zich voor die kinetische theorie te testen: als kleine maar zichtbare deeltjes worden opgehangen in een vloeistof moeten ze gebombardeerd worden door die willekeurige beweging van de onzichtbare vloeistofdeeltjes.

Mijn eerste bedoeling was het vinden van feiten die op de meest betrouwbare manier het bestaan van atomen met een bepaalde eindige afmeting zouden bevestigen.

Brownse beweging is genoemd naar de botanicus Brown die in 1827 onder de microscoop de krioelende beweging van stuifmeelkorrels

in een vloeistof ontdekte.[12] Hij schrijft

Tijdens het onderzoek over de vorm van deze deeltjes in het water, observeerde ik er veel die duidelijk in beweging waren... Deze bewegingen waren van die aard dat ik na frequent herhaalde waarneming begreep dat ze niet ontstonden door een vloeistofstroom noch door geleidelijke verdamping, maar dat ze aan het deeltje zelf toebehoorden.

Brown onderzocht verder of de keuze van de planten belangrijk was en hij vond bovendien dat de deeltjes gerust konden vervangen worden door inorganisch materiaal. Dat bestaan van een nooit afnemende random beweging was strijdig met alle andere ervaring en het was via de kinetische theorie dat Einstein een antwoord vindt. Einstein spreekt echter niet rechtstreeks over de beweging van de Brownse deeltjes. Hij had wel gehoord over de bevindingen van Brown maar het lijkt erop dat hij zeker geen voldoende materiaal had om observaties en theorie zelf te vergelijken.

Denk aan uiterst lichte en kleine deeltjes (met een diameter van ongeveer 1/1000 mm) die omwille van de warmtebeweging van de moleculen in de vloeistof een onregelmatige beweging uitvoeren. We moeten niet letterlijk denken dat de botsing van een vloeistofmolecule direct zichtbaar wordt in het heen en weer bewegen van het deeltjes. Van een directe stoot is eigenlijk niets te merken omdat het massaverschil tussen de deeltjes en de moleculen toch zeer groot is. Bovendien zal gemiddeld het aantal botsingen van alle kanten gelijk zijn. Nochtans gebeurt het dat in een korte tijd veel meer botsingen aan één kant optreden dan aan een andere kant. We kunnen spreken over toevallige afwijkingen of beter, over fluctuaties rond het gemiddelde. We noemen Brownse beweging daarom een fluctuatiefenomeen: het resultaat van de fluctuatie is dat het deeltje zich gedurende een korte tijd in één bepaalde richting beweegt om daarna weer in een andere richting te gaan. De grote verplaatsingen, een grillige zigzag-beweging door de vloeistof, zijn waarneembaar met de microscoop.

[12]Hij was echter zeker niet de eerste om die beweging op te te merken. Bijvoorbeeld, Jan Ingenhousz had het al beschreven in 1785.

Dat kwalitatieve beeld volstaat niet. De vraag is vooral hoe de verplaatsingen ook kwantitatief met de beweging van de vloeistof-moleculen kan verbonden worden. In het bijzonder, hoe verschijnen grootheden als de temperatuur en de viscositeit van het water in de formules? Daarvoor dient de kinetische gastheorie.

Naar het einde van de 19de eeuw hadden vooral Maxwell en Boltzmann de statistische theorie van de moleculaire beweging bestudeerd en vooruit geholpen. Kanstheorie en de theorie der fluctuaties corrigeerden het gemiddelde gedrag zoals door de thermodynamica beschreven werd. Nu weten we goed dat de variantie of de standaarddeviatie een spreidingsmaat is voor de kansverdeling: een verdeling is meer of minder gepiekt rond een gemiddelde waarde. Dat is wat Einstein doet, een innovatie voor die tijd: hij kijkt naar de gemiddelde kwadratische afwijking, een maat voor de spreiding rond de gemiddelde positie van het bewegende deeltje. Deze variantie kan in verband worden gebracht met de zogenaamde diffusieconstante. Omdat die diffusieconstante kan uitgedrukt worden in termen van de fysische eigenschappen van het systeem deeltjes-vloeistof, is Einstein zo in staat een formule af te leiden waarin die variantie evenredig is met de temperatuur en omgekeerd evenredig met de viscositeit en de afmeting van het deeltje. Ik ga uitleggen hoe dat tot stand komt.

2.4.3

Stochastische wandelaar

Ik beschouw een kanstheoretisch model voor een stochastische wandelaar. Bekijk eerst één deeltje op een één-dimensionaal rooster dat telkens springt naar een naaste buur. Het deeltje vertrekt op tijdstip nul ($t = 0$) vanuit de oorsprong en beslist om ofwel één stapje naar links ofwel één stapje naar rechts te springen. Dit wordt beslist met een eerlijk muntstuk: werpen we ‘kop’, dan gaat het deeltje naar rechts, werpen we ’munt’, dan gaat het deeltje naar links. Er is dus een gelijke kans (gelijk aan een half) om naar rechts of naar links te springen. Dat herhalen we telkens opnieuw.

Duiden we met X_n de positie aan van het deeltje na n beslissingen,

dan zal

$$X_n = X_{n-1} - 1 \ \text{ met kans } 1/2$$

en

$$X_n = X_{n-1} + 1 \ \text{ met kans } 1/2$$

De gemiddelde positie $\langle X_n \rangle$ zal natuurlijk gelijk zijn aan nul (alles blijft symmetrisch rond de oorsprong) maar er kunnen zich wel fluctuaties voordoen. Daartoe berekenen we de gemiddelde kwadratische afwijking. Bijvoorbeeld, na één stap is het kwadraat van de positie X_1^2 zeker gelijk aan 1 terwijl na twee stappen, X_2^2 gelijk is aan 4 met kans 1/2 en gelijk is aan 0 met kans 1/2. Dus, de gemiddelde kwadratische afwijking na twee stappen, genoteerd $\langle X_2^2 \rangle$, is gelijk aan 2. Meer algemeen is het ook niet zo moeilijk om te berekenen dat

$$\langle X_n^2 \rangle = n$$

Vervangen we het aantal gemaakte beslissingen door de tijd (misschien op een evenredigheidsfactor na), dan is de gemiddelde kwadratische afwijking op tijd t

$$\langle X_t^2 \rangle \simeq t$$

evenredig met t. Meer algemeen, wanneer de afstand tussen de roosterpunten niet precies gelijk aan één wordt genomen en/of de tijd tussen het springen een mogelijks veranderlijke wachttijd is, krijg je een relatie van de vorm

$$\langle X_t^2 \rangle = 2D\, t \tag{2.4.1}$$

waarin D een zekere constante is, afhankelijk van de voorheen vermelde karakteristieken.

Tot dusver had ik het over de variantie. We kunnen echter nog meer berekenen. Stel nog altijd voor ons muntstukken-experiment dat $P_n(x)$ de kans is dat het deeltje zich bevindt op positie x na n worpen. Bijvoorbeeld, $P_0(0) = 1, P_1(1) = P_1(-1) = 1/2$. Het is moeilijker om direct de algemene uitdrukking voor $P_n(x)$ op te schrijven maar de volgende vergelijking is wel gemakkelijk in te zien:

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\, P_n(x-1) + \frac{1}{2}\, P_n(x+1)$$

Het deeltje kan immers enkel na $n+1$ worpen op x aankomen als het na n worpen ofwel op $x-1$ ofwel op $x+1$ was geland. Ik ga die laatste vergelijking herschrijven:

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}\left[P_n(x-1) + P_n(x+1) - 2P_n(x)\right]$$

Dat lijkt ingewikkelder maar er is een reden om het zo te doen. Het linkerlid is nu een verandering in de tijd (op vaste plaats x) en het rechterlid is een tweede variatie in de positie, $P_n(x-1)+P_n(x+1)-2P_n(x) = [P_n(x+1)-P_n(x)]-[P_n(x)-P_n(x-1)]$, op vast moment n. Gaan we weer over naar een continue beschrijving, in ruimte en tijd, dan zien we zo in dat de vergelijking formeel equivalent is met de partiële differentiaalvergelijking

$$\partial_t P_t(x) = D\, \partial_x^2 P_t(x) \tag{2.4.2}$$

Het linkerlid is nu een afgeleide naar de tijd t en het rechterlid bevat de tweede afgeleide naar de positie x. Dat de coëfficient D dezelfde moet zijn als in (2.4.1) volgt ook uit een eenvoudige berekening. Immers,

$$\langle X_t^2 \rangle = \int x^2 P_t(x) dx$$

We kunnen (2.4.2) ook rechtstreeks afleiden mits enige verbeelding over hoe we het spel direct organiseren voor een continue tijd t en een reële positie x.

Het lijkt niet onredelijk om het vorige te gebruiken als model voor de beweging van een deeltje onderhevig aan de willekeurige botsingen van de watermoleculen. Op één of andere manier moet de informatie over het medium dan effectief bevat zijn in de coefficiënt D. Bijvoorbeeld, hoe heviger en frequenter de botsingen, hoe groter zal D zijn. Volgens de kinetische gastheorie meet net de temperatuur dat aspect van de beweging der watermoleculen. We durven daarom voorspellen dat D evenredig zal zijn met de temperatuur van de vloeistof. Anderzijds hoeven botsingen niet immer volkomen efficiënt te zijn in het doorgeven van hoeveelheid van beweging. We weten dat vloeistoffen in meer of mindere mate “plakkerig” of visceus kunnen zijn. Dat wordt beschreven door de

viscositeit van de vloeistof. Bovendien zal de afmeting van de korrel een rol spelen. Een groter voorwerp kan gemakkelijker blijven "plakken." Dat kan ook in het vorige model opgenomen worden door de effectieve afstand waarover het deeltje in elke stap beweegt, te laten variëren. Het lijkt redelijk dat D omgekeerd evenredig is met de viscositeit van de vloeistof en met de diameter van de korrel.

2.4.4

Diffusie

Osmose, hierboven besproken, is eigenlijk een selectief diffusieproces. De moleculen van het oplosmiddel kunnen door het membraan en zich overal verspreiden. De wet van Fick zegt dat de mate van deze diffusie evenredig is met het verschil in partiële druk. Einstein wil dat echter ook toepassen, niet op een oplossing maar op een suspensie. Vanuit kinetisch standpunt kan er echter geen verschil zijn, zo bleek ook uit zijn eerste twee paragrafen.

We nemen een vloeistof waarin deeltjes hangen. Ze zijn *in suspensie* en willekeurig verdeeld door de vloeistof. We verwachten dat de deeltjes zich verspreiden om de concentratie gelijkmatig te maken. Zo een effect noemen we diffusie, zoals dat van een inktdruppel in een glas water: als er concentratieverschillen zijn, zal er een deeltjesstroom verschijnen. Het is immers gemakkelijker te migreren naar een dun bevolkt dan naar een dicht bevolkt gebied. In de thermodynamica van transportprocessen verschijnt er een diffusieconstante D als de evenredigheidconstante tussen de deeltjesstroom en het verschil (beter, de gradiënt) in deeltjesdichtheid. De mate van diffusie, dat is de mate waarin de deeltjes migreren en zich verspreiden onder invloed van concentratieverschillen wordt zo gekwantificeerd door de diffusieconstante.

In §3 bepaalt Einstein de diffusiecoëfficient van de zwevende deeltjes. De wet van Fick geeft een deeltjesstroom evenredig met de gradiënt in lokale concentratie:

$$-D\,\frac{\partial \nu}{\partial x}$$

Einstein noteert ν voor het aantal deeltjes in suspensie per eenheid van volume rond positie x. Het minteken vooraan zegt dat de stroom in de richting van de positieve $x-$as wijst als de concentratie afneemt in diezelfde richting.

Einstein beschouwt verder een kracht F (genoteerd met K) die langs de $x-$as werkt. Dat zou de zwaartekracht kunnen zijn met de $x-$as volgens de hoogterichting, die werkt op de collectie deeltjes die rondzweven in de vloeistof. Die externe kracht, de zwaartekracht, zorgt voor een zeker dichtheidsprofiel in de deeltjesconcentratie. Dat is sedimentatie en iets gelijkaardigs vinden we in onze atmosfeer: de concentratie van bepaalde stoffen is afhankelijk van de hoogte waarop je kijkt. De deeltjes bewegen in de vloeistof onder invloed van de zwaartekracht maar als die vloeistof voldoende plakkerig is (visceus), zal de snelheid gewoon constant zijn, evenredig met de uitwendige kracht maar omgekeerd evenredig met de viscositeit van de vloeistof en de diameter van de deeltjes. Dat wordt meer precies beschreven in de wet van Stokes[13].

De deeltjes "vallen" dan naar beneden met een (eind)snelheid gelijk aan

$$\frac{F}{6\pi\mu r}$$

waarin μ de viscositeit is van de vloeistof en r is de straal van de bolvormige deeltjes[14]. Deze hangt niet af van de opgehangen deeltjes.

Als er dynamische evenwicht is ingesteld zal de stroom "naar boven" en "naar beneden" gelijk zijn, of lokaal is

$$\frac{\nu F}{6\pi\mu r} = D\,\frac{\partial \nu}{\partial x}$$

[13] George Stokes berekende die eindsnelheid in 1851 uit een analyse van de zogenaamde Navier-Stokes vergelijking. Het is amusant dat een wet die een belangrijke fenomenologie van continuum-vloeistofmechanica verwoordt, hier een essentiele rol speelt in het bewijzen van het deeltjeskarakter van de vloeistof.

[14] Einstein gebruikt voor de wrijvingscoëfficiënt de letter k en voor de straal schrijft hij P. Verder is bij Einstein altijd $R/N = k_B$, de contante van Boltzmann.

Dat is vergelijking (2) uit Einstein's §3.

Om D te vinden moet hieruit F geëlimineerd worden. Daarvoor dient vergelijking (1) van Einstein. Dat is een statistische evenwichtsrelatie. De oplossing van (1) is de Boltzmann-distributie

$$\nu(x) = \frac{1}{Z} \exp[-\frac{1}{k_B T} U(x)], \quad \frac{dU}{dx} = -F$$

die Einstein hier afleidt uit wat we nu het variatieprincipe van Gibbs noemen. Deze evenwichtsverdeling kan men vergelijken met de Maxwell-verdeling (1.2.13) maar waar de energie voor de deeltjes bepaald wordt door de potentiële energie $U(x)$. Eigenlijk is de afleiding van Einstein wat algemener geldig maar dat is hier niet relevant.

Uit de dynamische (2) en de statistische evenwichtsrelatie (1) kan F (dat is K) geëlimineerd worden met als resultaat (de Einstein-Stokes relatie):

$$D = k_B T \, \frac{1}{6\pi\mu r} \tag{2.4.3}$$

waarin k_B de constante van Boltzmann is, uit (1.2.2), en T is de absolute temperatuur.

2.4.5

Over de ongeordende beweging...

In §4 van zijn artikel verbindt Einstein de diffusiecoëfficiënt met de gemiddelde kwadratische afwijking in de ongeordende beweging van de deeltjes in suspensie. Dat heb ik al stilletjes voorzien door dezelfde letter D te gebruiken in (2.4.1), (2.4.2) en in (2.4.3). De belangrijkste conceptuele stap is hier de overgang te maken van een één-deeltjes beschrijving naar de thermodynamische beschrijving van de diffusie van deeltjesconcentratie. Immers, om een idee te krijgen over de fysische interpretatie van de coefficiënt D uit 2.4.3 hoeven we eigenlijk niet strict aan één wandelaar te denken. We kunnen ook spreken over een 'wolkje' wandelaars, zeg maar meerdere wandelaars die rond de oorsprong starten en die elk hun

eigen muntstuk bijhebben. In de loop van de tijd zal dat initieel wolkje verdunnen; elk gaat onafhankelijk een eigen traject volgen. Nu krijgt de grootheid $P_t(x)$ in (2.4.2) de interpretatie van deeltjesconcentratie op tijd t rond positie x.

Einstein redeneert analoog. Er zijn n deeltjes in suspensie. Hun positie zal veranderen in de tijd. Einstein geeft geen gedetailleerde beschrijving van de interactie van de deeltjes met de vloeistofmoleculen. Hij introduceert een random of stochastische veranderlijke Δ, met verdeling φ, die de verplaatsing over een klein tijdsinterval τ aanduidt. Die verplaatsingen (of incrementen) zijn onafhankelijk voor elk van de deeltjes en worden telkens opnieuw (bij elke stap) onafhankelijk uit φ getrokken. Einstein gaat nu op zoek naar de functie $f(x,t)$ die de concentratie geeft van de deeltjes rond positie x op tijd t. Dat alles is analoog aan wat we probeerden in paragraaf 2.4.3. Daar kwamen we op vergelijking (2.4.2). De vergelijking (1) van Einstein is ermee identiek. Het is de diffusievergelijking.

Hij merkt verder op dat het perfect mogelijk is om de n deeltjes te vervangen door n keer 1 deeltje dat vertrekt vanuit de oorsprong. Zo kan je een bijkomende voorwaarde geven op de functie f, $f(x,0) = 0$, met als oplossing

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp[-\frac{x^2}{4Dt}]$$

Nu is het eenvoudig om de standaarddeviatie te berekenen:

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt} \tag{2.4.4}$$

voor de vierkantswortel uit het gemiddelde van het kwadraat van de verplaatsing in de $x-$richting in tijd t. Besluit: de berekeningen van Einstein leiden tot een identificatie van de verhouding tussen de variantie van de random verplaatsingen en de tijd, met de fenomenologische diffusieconstante D. Vermits die laatste gegeven is door (2.4.3) toont Einstein hoe de waargenomen verplaatsingen van de deeltjes in een vloeistof moeten afhangen van de temperatuur, van de viscositeit en van de diameter van de deeltjes.

2.4.6

Formule voor de gemiddelde verschuiving

Het zou Einstein niet zijn of hij gaat een eindje op weg met de experimentator. Dat is het onderwerp van zijn §5. Uit de vorige berekeningen, in het bijzonder (2.4.1) of (2.4.4) en (2.4.3), kan D geëlimineerd worden. Zo wordt λ_x een functie van de temperatuur en de viscositeit van de vloeistof en van de straal van het deeltje. Einstein rekent voor welke verplaatsingen je typisch zult meten (en zien onder een microscoop). Als realistische getallen worden ingevuld, krijg je dat voor een deeltje met een straal van ongeveer een duizendste millimeter in water op kamertemperatuur, de verplaatsing per minuut ongeveer 6 duizendste van een millimeter moet zijn. Anderzijds merkt hij op hoe uit gemeten verplaatsingen een waarde voor het getal van Avogadro (1.2.2) kan verkregen worden.

Einstein eindigt zijn artikel met een oproep tot experimentele verificatie; het klinkt nog beter in het Duits: *Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden!* De verdere theoretische studie van Brownse beweging (onder andere door Einstein) en de daaropvolgende experimentele verificaties (vooral van Jean Perrin, die daarvoor in 1926 de Nobelprijs ontving) hebben inderdaad geleid tot een bepaling van belangrijke grootheden zoals moleculaire dimensies en de bepaling van de constante van Avogadro.

2.4.7

Fluctuatietheorie

Het artikel van Einstein over de Brownse beweging is ook belangrijk in de aanloop tot een systematische fluctuatietheorie en in de dynamische studie van stochastische processen. Op het web krijg je vandaag onder de zoeknaam “Brownian motion” meer dan 50000 hits.

De kanstheoretische beschrijving, onder andere in (2.4.3) kan eenvoudig lijken maar het vernieuwende zit in de conceptuele stappen. Het is bijvoorbeeld niet zo vanzelfsprekend om zich te concentre-

ren op de gemiddelde kwadratische afwijking. Vergeet niet dat kansbeschouwingen in de natuurwetenschappen geen erg lange geschiedenis hadden. We hadden het al over het pionierswerk van Daniël Bernoulli in 1.1.6 maar dat was eerder anekdotisch. Er was verder het werk van Laplace in verband met statistische foutenleer en toepassingen voor data-analyse voor de hemelmechanica; er was de Belg Adolphe Quetelet die de statistiek en de toepassing van de zogenaamde centrale limietstelling ferm vooruithielp; er was Charles Darwin die kansbeschouwingen koppelde aan bepaalde evolutielijnen, en tenslotte waren er Maxwell en Boltzmann die inzagen hoe de kansrekening de mechanica naar de thermodynamica begeleidde. Dat alles was van de 19de eeuw. Toch was er geen overvloed aan concrete kansberekeningen die direct en kwantitatief informeerden over specifieke concrete natuurkundige feiten. Een bijna-uitzondering was een artikel van Lord Rayleigh uit 1891, *Dynamical Problems in Illustration of the Theory of Gases*. Het is zeer gelijkaardig aan dat van Einstein maar het verband met het probleem van de Brownse beweging werd er niet opgemerkt. Het werk van Einstein waarbij 'toeval' werd berekend en toegepast op een observeerbaar fenomeen, was nieuw.

Wat betreft de wiskunde was het niet zo vernieuwend. Stochastische wandelaars en wiskundige diffusieproblemen waren reeds eerder verschenen. De onderliggende wiskunde bij de resultaten van Einstein werden reeds op het einde van de 19de eeuw door Louis Bachelier (in de context van de financiële wiskunde[15] en door Rayleigh beschreven. Het feit dat Einstein binnen het grote probleem van de verificatie van de atoomhypothese verwijst naar een concreet fenomeen, experimentele verificatie voorstelt en heel toegankelijk schrijft, maakt wellicht deel uit van de verklaring waarom in vergelijking zowel het werk van Rayleigh als het werk van Bachelier veel minder directe invloed hebben uitgeoefend en lange tijd vrij onbekend zijn gebleven.

[15] De tak van de financiële wiskunde is en blijft een grote afnemer van de wiskunde der stochastische processen. Het meest recente voorbeeld is de grote activiteit rond het prijzen van opties. De Nobelprijs economie van 1997 ging naar Robert Merton and Myron Scholes voor hun werk, samen met Fischer Black (die stierf in 1995) voor de ontwikkeling van een diffusiemodel om de prijs van bepaalde opties te berekenen.

2.5 Het artikel over de Speciale Relativiteit

Als licht bestaat uit deeltjes, de fotonen, bewegen die dan volgens de wetten van de klassieke mechanica?

De relativiteitstheorie vertrekt van de tegenstelling tussen het relativiteitsprincipe van Galileo (dat zegt dat alle wetten van de fysica gelijk zijn in elk ‘goed’ referentiestelsel) en het feit dat de lichtsnelheid in vacuum dezelfde is in alle referentiestelsels. Dat is contradictorisch want als in één stelsel de lichtsnelheid gelijk is aan c, dan zou de lichtsnelheid in een stelsel dat in de zin van het licht meebeweegt met een snelheid v, gelijk zijn aan $c - v \neq c$. Als we echter een invariante lichtsnelheid eisen, dezelfde voor alle waarnemers met om het even welke snelheid, dan zal ruimte en tijd onvermijdelijk en op een eerder tegenintuïtieve manier moeten samenvloeien. Immers, snelheid is een ruimtedimensie gedeeld door de tijd. Dit vereist, in de woorden van Einstein *heel duidelijk te zijn over wat we verstaan onder “tijd.” We moeten in gedachte houden dat alle beweringen waarin de tijd voorkomt altijd beweringen zijn over gelijktijdige gebeurtenissen.*

Het eerste gedeelte van het artikel is dan ook kinematica, het opstarten van een nieuwe mechanica. We lezen hier een zeer pragmatische en operationele Einstein en waar de ervaring met de thermodynamica op minstens twee niveaus duidelijk doorklinkt. Ten eerste vertrekt Einstein van algemene principes die als enig uitgangspunt alle redeneringen moeten begeleiden en ten tweede, is er de concrete kritiek van abstractie.

We herhalen eerst de twee algemene principes waarvan Einstein vertrekt (geformuleerd in de inleiding van zijn artikel):

...dezelfde wetten van elektrodynamica en optica zullen gelden in alle referentiekaders waarvoor de vergelijkingen van mechanica gelden. ... licht plant zich altijd voort in de lege ruimte met een wel-

bepaalde snelheid c die onafhankelijk is van de bewegingstoestand van de uitzender.

Het eerste postulaat is eigenlijk het relativiteitsprincipe van Galileo maar met nadruk uitgebreid tot de wereld van elektromagnetische fenomenen. Als één referentiestelsel beweegt met een uniforme snelheid ten opzichte van een tweede stelsel, dan zal elke fysische wet in het ene stelsel ook gelden in het andere. Ze zijn ononderscheidbaar. Het tweede postulaat, de invariantie van de lichtsnelheid, was natuurlijk reeds vervat in de vergelijkingen zelf (van Maxwell) van het elektromagnetisme. Het is de combinatie van deze postulaten die rigoureus worden behouden en toegepast, waaruit de hele theorie volgt.

De tweede hoofdtoon van het relativiteitsartikel van Einstein is het in vraag stellen van allerlei abstracte *a priori*'s.

..de uitspraken van om het even zulke theorie gaan over verbanden tussen starre lichamen (coördinaatsystemen), klokken, en elektromagnetische processen. Onvoldoende consideratie van deze omstandigheid ligt aan de basis van de moeilijkheden die de elektrodynamica van bewegende voorwerpen heden ondervindt.

Het belangrijkste woord is hier *verbanden* of *relaties*, en wel tussen concrete dingen. Net zoals de thermodynamica vertrekt van algemene postulaten en dan de theorie ontwikkelt vanuit empirische overwegingen, zal Einstein de fundamentele structuur van mechanica herbezoeken vanuit een operationeel standpunt. In 1922 zal hij herhalen:

De enige rechtvaardiging voor onze concepten en ons systeem van concepten is dat ze het complex van onze ervaringen representeren; verder hebben ze geen rechtvaardiging. Ik ben ervan overtuigd dat de filosofen een schadelijk effect hebben gehad op de vooruitgang van het wetenschappelijk denken door bepaalde fundamentele concepten weg te voeren uit het domein van de empirie waar ze onder onze controle zijn, naar de onaantastbare hoogtes van het a priori. Want zelfs als zou blijken dat het geheel van ideeën niet via logische middelen kan worden afgeleid maar, in zekere zin, een creatie is van de menselijke geest, zonder dewelke geen wetenschap mogelijk is, toch is dat geheel van ideeën net zo min onafhankelijk

van de aard van onze ervaringen als kleren onafhankelijk zijn van de vorm van het menselijk lichaam. Dat is in het bijzonder waar voor onze concepten van tijd en ruimte, die fysici, gedwongen door de feiten, hebben neergehaald van de Olympus van de a priori om ze in een dienstbare conditie te brengen.

Over de elektrodynamica van lichamen ...

Einstein begint met het vermelden van twee moeilijkheden. Ten eerste bestaat een asymmetrie in de opvatting over het elektromagnetisme van Maxwell. Denk aan de wisselwerking tussen een magneet en een geleider. Einstein merkt op dat het optreden van een elektrische stroom in de geleider enkel afhangt van de relatieve beweging van magneet en geleider. Ten tweede zijn er de mislukte experimenten die het bestaan van een "lichtmedium" of ether moesten aantonen. Dat, zo schrijft Einstein, leidt *tot het vermoeden dat met het begrip van de absolute rust... geen eigenschappen van de verschijnselen zelf overeenkomen.*

Vandaar het eerste postulaat, het principe van de relativiteit: er gelden dezelfde elektrodynamische en optische wetten voor alle coördinatensystemen waarin de wetten van de mechanica geldig zijn. Daarbij voegt Einstein de tweede onderstelling: licht plant zich in de lege ruimte immer voort met dezelfde snelheid, onafhankelijk van de bewegingstoestand van de lichtbron. Voor hij begint, wil Einstein nog duidelijk motiveren waarom hij met een eerste en belangrijkste deel kinematica begint: elektrodynamica moet steunen op uitspraken over verbanden tussen starre lichamen, uurwerken en elektromagnetische processen.

Kinematische Deel

Einstein begint met een fundamentele vraag: wat bedoelen we in de natuurkunde met tijd? Zijn antwoord is duidelijk: *Als ik bijvoorbeeld zeg "die trein komt hier om 7 uur aan", dan betekent dat*

zoiets als "de kleine wijzer van mijn uurwerk wijst op 7 en het aankomen van de trein zijn gelijktijdige gebeurtenissen". Daarna komt een grondige analyse. Einstein plaatst veel bijzinnen en opmerkingen om als het ware elk mogelijk bezwaar van de lezer op voorhand te pareren.

Ik begin met zijn §1. (Bemerk wel de notatie V van Einstein voor de lichtsnelheid.)

2.5.1

Tijd enzovoort

Om ons de hoofdgedachte in de kritiek van Einstein voor te stellen, nemen we de eerste paragraaf "Definitie van Gelijktijdigheid" uit zijn artikel. Het gaat over het probleem van de tijdmeting in de fysica en hij begint met de definitie van gelijktijdigheid.

Veronderstel twee waarnemers W_1 en W_2, beiden in rust ten opzichte van een coördinatensysteem. Elk beschikken ze over een ideale, volkomen gelijkmatige klok. Om fysica te doen, en misschien ook voor andere doeleinden, willen ze allereerst hun klokken gelijk zetten (synchroniseren) en ze moeten elkaar dus seinen. Waarnemer W_1 bekijkt zijn klok, leest het tijdstip t_1 af en zendt een lichtsignaal naar W_2. Deze laatste (waarnemer W_2) ontvangt het signaal op tijdstip t_2, ten minste zoals afgelezen op zijn eigen klok. Hij laat dat signaal onmiddellijk terugkaatsen naar W_1. Vermits licht een eindige snelheid heeft, zal het terug bij W_1 aankomen op een tijdstip t'_1, afgelezen op de klok van W_1, met $t'_1 > t_1$. De vraag is nu: met welk tijdstip van W_1's klok correspondeert het tijdstip t_2 op W_2's klok? Iedereen zal wellicht (samen met Einstein) antwoorden $(t'_1 + t_1)/2$ maar volgens de theorie die toen gangbaar was, is dit niet vanzelfsprekend. Immers, dat antwoord veronderstelt dat de snelheid van het licht in de heengaande en de teruggaande richting gelijk zijn. Dat zou echter niet het geval zijn als de snelheid van het licht afhing van de beweging van de uitzender ten opzichte van een hypothetische ether. Maar eigenlijk kan dat bezwaar nooit hard gemaakt worden; hoe zouden we kunnen de snelheid van het licht

werkelijk meten als de basis voor de tijdmeting nog niet is gelegd?

In de tweede paragraaf geeft Einstein een kritiek op het gebruik van het begrip *absolute gelijktijdigheid* door te stellen dat we geen signalen hebben die zich met oneindig grote snelheid kunnen bewegen: gelijktijdigheid is relatief. Twee gebeurtenissen die gelijktijdig zijn wanneer ze worden waargenomen vanuit een bepaald referentiestelsel, zullen niet langer gelijktijdig zijn wanneer geobserveerd vanuit een systeem dat beweegt ten opzichte van het eerste. Ook het meten van lengtes dient gespecifieerd: de lengte van een bewegende starre staaf zoals gemeten in rust is niet gelijk aan de lengte van dezelfde rustende staaf. Een eenvoudig voorbeeld (of gedachtenexperiment) werd later in 1917 door Einstein gegeven en is sindsdien een standaardillustratie geworden. We geven daarvan een versie.

Stel je een zeer lange trein voor die op een spoor vlak naast het perron van links naar rechts rijdt. Een waarnemer die stilstaat op het perron heeft twee staven dynamiet links en rechts maar op gelijke afstand van de waarnemer, op het perron naast het spoor bevestigd. Ik zal spreken over staaf 1 (links) en staaf 2 (rechts). Hij kan die twee staven tegelijk doen ontploffen door een lichtsignaal tegelijk naar staaf 1 en staaf 2 te sturen. Hij doet dat zo dat de twee ontploffingen tegelijk gebeuren en precies op het moment dat de conducteur die midden in de trein zit, langs hem heen passeert. De twee explosies zullen twee krassen achterlaten op de trein, één aan de voorzijde (door staaf 2) en één aan de achterzijde (door staaf 1). De conducteur kan de schade opmeten en zou natuurlijk vinden dat de afstanden van waar hij zat tot de eerste kras en tot de tweede kras even groot zijn. De explosies hebben naast veel lawaai ook beide een lichtflits veroorzaakt. De waarnemer op het perron zal natuurlijk die lichtflitsen tegelijk ontvangen. In zijn referentiestelsel waren de ontploffingen immers gelijktijdig. Dat is anders voor onze conducteur. Hij zal de flits die afkomstig is van staaf 2 eerst ontvangen omdat, terwijl het licht onderweg is, de trein al een eindje naar rechts is doorgereden. Vermits de afstanden tussen hem en de twee krassen echter even groot zijn, zal hij besluiten dat de explosies niet gelijktijdig waren. Bovendien, daaruit volgt dat de plaats op de trein waar kras 2 komt, eerder voorbij staaf 2

rijdt dan dat de plaats op de trein waar kras 1 komt, voorbij staaf 1 rijdt. Dus moet de conducteur besluiten dat de afstand tussen staaf 1 en staaf 2 strict kleiner is dan de afstand tussen de twee krassen.

Hier zien we reeds dat de invariantie van de eindige lichtsnelheid zowel voor tijdsmeting als voor lengtemeting eigenaardige gevolgen heeft. Ik kom er op terug in 2.5.3.

2.5.2

Lorentztransformaties

De invariantie van de lichtsnelheid is in strijd met de klassieke transformatieformules om snelheden van het ene referentiestelsel naar het andere om te zetten. Vandaar de noodzaak om een nieuwe transformatie, nieuwe omzettingsformules, te vinden. De naam van deze omzetting is Lorentztransformatie omdat Lorentz de wiskundige formules reeds vroeger had gepresenteerd.

In 1895 was Lorentz tot het besluit gekomen dat de krachten die de materie bijeenhouden elektromagnetisch van aard zijn. Daarom is het logisch dat voorwerpen onderworpen zullen zijn aan wetmatigheden die afgeleid worden uit de vergelijkingen van Maxwell. In combinatie met een poging om het experiment van Michelson en Morley te verklaren (zie onder 1.4.4), ziet Lorentz dat voorwerpen lichtjes moeten samentrekken in de richting waarin ze met zeer grote snelheid bewegen. Dat heet de FitzGerald-Lorentz lengtecontractie en volgt uit meer algemene transformatieformules om twee referentiestelsels, het ene bewegend met een vaste snelheid v ten opzichte van het andere, met elkaar te verbinden. Dat zijn de Lorentztransformaties. Ook Henri Poincaré was deze transformaties op het spoor gekomen maar slechts in de handen van Einstein werden ze ingebouwd in een unieke mechanica.

Ik zal de vorm van deze (Lorentz)transformaties niet helpen afleiden. Het is nochtans niet zo moeilijk. We kunnen ons gerust beperken tot 1 ruimte-dimensie en noteren met x de positie van

een deeltje op tijd t. Dit is ten opzichte van een eerste referentiestelsel W_1. Er is een andere waarnemer, of referentiestelsel W_2, bewegend met een snelheid v ten opzichte van W_1. De coördinaten van het deeltje volgens W_2 worden genoteerd met (x', t'). Volgens het relativiteitsprincipe van Galileo zou $x' = x - vt$ en $t' = t$.

Nemen we nu eens een lichtdeeltje, dat beweegt met snelheid c en dus moeten de coördinaten ervan voldoen aan $x = ct$ (als we aannemen dat het op tijd $t = 0$ in de oorsprong $x = 0$ zat). Echter, de invariantie van de lichtsnelheid vraagt dat ook

$$x' = ct'$$

en dat is in strijd met de transformaties à la Galileo. De Lorentztransformaties doen het anders en wel zo dat tijd en ruimte erg symmetrisch behandeld worden. Kijk maar:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

waar γ en β twee parameters zijn[16], namelijk

$$\beta = \frac{v}{c}, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Bemerk dat nu wel $x' = ct'$ verenigbaar is met (en volgt uit) $x = ct$. Bemerk ook dat $\beta c = v$ en dat als we zouden nemen dat $\beta \ll 1$ of $c \uparrow +\infty$ dat dan $\gamma \simeq 1 + \beta^2/2$ en $\beta \downarrow 0$ zodat we, in die “nietrelativistische limiet” de Galileo-transformaties terugvinden.

2.5.3

Alles is relatief...

Het is amusant dat door de lichtsnelheid invariant te nemen, nu opeens tijdsduur en lengte geen invarianten meer zijn. De absoluutheids- of invariantietheorie van Einstein is een echte relativiteitstheorie

[16] Einstein gebruikt V voor de lichtsnelheid en schrijft β voor wat hier γ is.

geworden[17]. Wanneer bijvoorbeeld een staaf een éénparige translatie uitvoert met een snelheid v ten opzichte van een goed referentiestelsel en zo dat de lengte van de staaf in de richting van de snelheid ligt, dan zal de lengte van de staaf in de verhouding

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

zijn verkort ten opzichte van de lengte die dezelfde staaf heeft wanneer zij in hetzelfde systeem rust. Dat is de contractie van bewegende starre lichamen. Analoog zijn er transformatieformules voor tijdsverlenging en voor de transformatie van snelheden. Dat alles is wat Einstein het kinematische deel van zijn artikel noemt.

Ik geef een eenvoudig argument waarin duidelijk zichtbaar wordt hoe de tijdsverlenging een gevolg is van de invariantie van de lichtsnelheid. Stel een raket die met een constante snelheid v zich verwijdert van de aarde. Er is een goed uurwerk aan boord, met name een doos waarin spiegels telkens een lichtsignaal van onder in de doos naar boven in de doos en terug sturen. De richting van het licht is loodrecht op de bewegingsrichting van de raket. Als de afstand tussen onder en boven in de doos gelijk is aan d zullen de raketvaarders daarvoor een tijd opmeten gelijk aan $t' = d/c$, afstand gedeeld door snelheid. Dat kan bijvoorbeeld voor hen de gehanteerde tijdseenheid zijn. Op aarde wordt ook naar dat uurwerk gekeken. Die zien natuurlijk de doos bewegen met een snelheid v. Stel dat ze t schrijven voor de tijd waarin het licht van onder naar boven in de doos gaat. In die tijd t is de doos een afstand vt opgeschoven. Dat kunnen we de horizontale afstand noemen ten opzichte van de vertikale afstand d. De afstand die het licht moet afleggen, volgens aarde, is dus $\sqrt{d^2 + (vt)^2}$, een toepassing van de stelling van Pythagoras. De lichtsnelheid blijft c zodat de tijd t nodig om die afstand af te leggen, voldoet aan

$$ct = \sqrt{d^2 + (vt)^2} = \sqrt{(ct')^2 + (vt)^2} \tag{2.5.2}$$

[17] De term relativiteitstheorie blijkt eerst gebruikt door Planck en Bucherer in 1906. Anderen vonden die naamgeving niet geslaagd omdat de nadruk beter op de invarianten zou liggen.

Of, de tijd in de raket

$$t' = \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2 - (vt)^2} = \frac{1}{\gamma}\,t$$

gaat trager dan de tijd op aarde. We kunnen het ook anders zeggen. Als een exacte copie van dat uurwerk op aarde blijft, vinden ze dat het bewegende uurwerk trager "tikt." De raketvaarders menen natuurlijk net hetzelfde en komen dus tot de omgekeerde conclusie. Het is relatief.

Laat ons voor alle zekerheid die berekening nog eens herdoen volgens de regels van Galileo. De snelheid van het licht, zoals gezien op aarde, zou niet langer invariant gelijk aan c zijn. Er komt iets bij omwille van de beweging van de raket. In de horizontale richting is de snelheid v en in de vertikale richting is de snelheid c. Daarom zou de lichtsnelheid, opnieuw via Pythogoras, gelijk zijn aan $\sqrt{v^2 + c^2}$ en zou (2.5.2) veranderen in

$$\sqrt{v^2 + c^2}\,t = \sqrt{d^2 + (vt)^2} = \sqrt{(ct')^2 + (vt)^2}$$

met als oplossing $t = t'$, zoals in de Newtoniaanse mechanica.

Met afstanden of beter, lengtes, gaat het net zo. Het is voldoende te beseffen dat we lengtes kunnen meten door een lichtsignaal van het ene naar het andere eind te sturen en de tijd daarover te meten. Lichtsnelheid is een invariant, tijd is relatief, dus lengte is relatief. Wat in rust ℓ meet, zal voor de beweger ℓ' zijn en

$$\ell = ct = c\gamma t' = \gamma \ell'$$

Het is vlug in te zien dat hier kansen liggen om paradoxaal-lijkende verhalen te verzinnen. De paradoxen van de relativiteitstheorie zijn oud en nog steeds prettig om te bestuderen. Een bekende paradox volgt in 2.5.5.

2.5.4

Minkowski-ruimte

Het indrukwekkendste van de nieuwe kinematica is dat het niet langer gegarandeerd is dat $t = t'$ of, dat tijd "relatief" kan zijn.

Dat hebben we hiervoor al benadrukt maar nu krijgen we tijd en ruimte expliciet verweven in een unieke entiteit: de vierdimensionale ruimte (vier = drie ruimte-dimensies en één tijd-dimensie). Dat is de ruimte van Hermann Minkowski, meetkundige en oud-leraar van Einstein in Zürich. In 1908 schrijft hij als eerste zinnen van een mededeling:

De kijk op ruimte en tijd die ik u wens voor te stellen is ontsprongen uit de experimentele fysica, en daarin ligt haar sterkte. Ze is radicaal. Vanaf nu zijn ruimte op zichzelf en tijd op zichzelf gedoemd om enkel schaduwen te worden, en slechts een unie van deze twee zal een onafhankelijke realiteit behouden.

Zeker een ander belangrijk aspect van deze ruimte van Minkowski is dat er ook een afstand kan gedefinieerd worden, analoog aan deze waarmee we werken in de ons vertrouwde Euclidische driedimensionale ruimte. In de nieuwe vier-dimensionale ruimte is die "afstand", genoteerd s, gedefinieerd als

$$s^2 = t^2 - (x/c)^2 - (y/c)^2 - (z/c)^2$$

waar x, y en z de drie ruimte-coördinaten zijn. Deze Minkowski-afstand wordt invariant gelaten onder de Lorentztransformaties (wat gemakkelijk te verifiëren is uit (2.5.1) door te zien dat $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$). Merk op dat als een deeltje zich van de oorsprong verwijdert met de lichtsnelheid, dat dan $s = 0$ (want dan is $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$). Dus, de afstand tot de oorsprong is gelijk aan nul voor elk punt (in ruimte-tijd) op de baan van het foton. Nu is er niets speciaals aan de oorsprong; we kunnen die eigenlijk overal neerzetten. Voor elk punt O kunnen we zo de lichtkegel definiëren als de verzameling punten die op afstand nul van O liggen en elk voorwerp moet zich telkens binnen de lichtkegel bewegen.

Die Minkowski-afstand heeft echter nog een meer directe fysische betekenis: het is het tijdsinterval dat door een klok wordt geregistreerd wanneer ze meebeweegt met het voorwerp. De klok meet dus niet t behalve wanneer ze in rust is (onveranderlijke x, y en z). In de volgende paragraaf zal ik die eigenaardige bewering nog verder illustreren met een "klassiek" voorbeeld. De correcte kloktijd, de "eigen tijd", voor een bewegende waarnemer wordt gegeven

door s en zal nooit groter, wel typisch kleiner zijn dan t.

2.5.5

Tweelingsparadox

Jan en Piet zijn tweelingen. Op zekere dag stapt Jan in een raket en Piet wuift hem uit. De raket vertrekt vliegensvlug en bereikt gauw een snelheid die de lichtsnelheid benadert. Als hij enkele jaren onderweg is, althans volgens zijn kalender, wordt Jan het echter beu en besluit terug te keren naar huis. Hij maakt rechtsomkeer en tenslotte parkeert hij de raket terug in de tuin van Piet. Jan stelt vast dat de tuin van Piet ondertussen helemaal veranderd is en ook blijkt gauw dat Jan nu veel jonger is dan Piet.

Met dit verhaal wordt geïllustreerd dat de eigen tijd niet enkel afhankelijk is van het vertrekpunt (een gebeurtenis in ruimte-tijd) en het aankomstpunt (een andere gebeurtenis in ruimte-tijd) maar eveneens van de weg ertussen. En wel zo dat de 'rechte' weg tussen de twee gebeurtenissen de grootste eigen tijd oplevert. Alle andere wegen leveren een kleinere eigen tijd op. Dit kan onwaarschijnlijk lijken maar daar is tegenwoordig een hele resem experimentele evidentie voor. Deze experimentele bekrachtiging gebeurt niet met tweelingen maar bijvoorbeeld met subatomaire deeltjes wiens vervaltijd veel langer wordt wanneer ze met heel hoge snelheden bewegen.

Laat ons nog een misverstand over de tweelingen vermijden. Als we zeggen dat Jan jonger is dan Piet, bedoelen we dat letterlijk. Het gaat over de biologische leeftijd zoals vergelijkbaar met een klok voor het biologische ritme. Piet kan ondertussen kaal zijn geworden of moet al een bril dragen en krijgt al vele rimpels terwijl Jan er nog heel fris uitziet[18].

Tenslotte, waar is de paradox? De gevaarlijke klif is dat de relativi-

[18] In realiteit geef ik Jan geen enkele kans om zo een reis te overleven, maar dat is hier niet het punt.

teit van de tijd voor ieder gelijk geldt. Kunnen we niet gewoon het gezichtspunt van Jan en Piet omwisselen? Dan beweegt Piet heel vlug weg van Jan. Zijn “raket” is de aarde terwijl Jan ter plaatse blijft. Nee, in het gedachtenexperiment zijn Jan en Piet niet omwisselbaar vermits ze niet met een vaste snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. Jan ondergaat minstens drie versnellingen terwijl Piet in rust blijft ten opzichte van de aarde.

Elektrodynamisch Deel

Het tweede deel van het artikel is elektrodynamisch. Einstein zal nu expliciet op zoek gaan naar de invariantie van de wetten van het elektromagnetisme en de bewegingsvergelijkingen van het elektron.

2.5.6

Transformaties

De wetten en vergelijkingen uit de fysica mogen niet van vorm veranderen wanneer men de vergelijking maakt tussen referentiestelsels die eenparig ten opzichte van elkaar bewegen, tenminste als men de Lorentztransformaties gebruikt om de veranderingen aan te brengen.

In zijn §6 schrijft Einstein de tijdsafhankelijke Maxwell-vergelijkingen uit[19]. Vermits het variaties zijn van de velden in ruimte en in tijd, kunnen de Lorentztransformaties er worden op los gelaten. Door gebruik van het relativiteitsprincipe vindt Einstein de transformatieformules voor het elektromagnetische veld.

Nog meer dan in de vergelijkingen van Maxwell vloeien ook het elektrische en het magnetische veld symmetrisch samen. Of iets elektrisch dan wel magnetisch wordt genoemd heeft niet langer een abolute betekenis. Het is veel symmetrischer geworden. De allereerste zin van het artikel had daarvoor reeds de toon gezet: *Het*

[19] De notatie is plezant, (X, Y, Z) voor de componenten van het elektrische veld en (L, M, N) voor deze van het magnetische veld. De ruimte-tijd coördinaten (x, y, z, t) gaan over in (ξ, η, ζ, τ).

is bekend dat de elektrodynamica van Maxwell — zoals vandaag normaal begrepen — als toegepast op bewegende lichamen, leidt tot asymmetrieën die niet inherent lijken aan de fenomenen.

Ik geef een voorbeeld. Stel dat twee waarnemers W_1 en W_2 met een constante snelheid v ten opzichte van elkaar bewegen. Er zijn elektrische ladingen q en q' in rust ten opzichte van waarnemer W_2. Voor waarnemer W_2 is er enkel een elektrische wisselwerking, de Coulombkracht tussen de twee ladingen. Waarnemer W_1 ziet q bewegen en spreekt dus over het magnetisch veld opgewekt door q. Omdat lading q' beweegt (met snelheid v) is er een Lorentzkracht op q', reeds vermeld in 1.3.1. De fysica moet echter wel dezelfde blijven.

We kunnen het ook anders uitdrukken. Zo vond Einstein (onafhankelijk van Poincaré die het ook al wist) dat de vergelijkingen van Maxwell voldoen aan de Lorentzsymmetrie, de invariantie onder een Lorentztransformatie.

2.5.7

Doppler-effect

In §7 leidt Einstein de relativistische formules af voor het Doppler-effect, de frequentie-verschuiving van het ontvangen signaal als gevolg van het naderen of verwijderen van de golftrein. Hij gebruikt de golfbeschrijving van het licht en vindt de frequentie, de richting en de amplitude van het licht zoals gezien door een waarnemer in beweging. Bijvoorbeeld, een waarnemer die een lichtbron tegemoet loopt met de snelheid van het licht, wordt blind: de intensiteit van de lichtbron schijnt oneindig.

2.5.8

Transformatie van energie

We zijn beland in §8 en die paragraaf is ook interessant omdat het artikel over de equivalentie van energie en massa daar op een natuurlijke wijze op volgt.

Einstein berekent dat de energie van lichtstralen zich op dezelfde manier transformeert als de frequentie (uit het Doppler-effect van 2.5.7). Hij vermeldt het niet maar Einstein denkt hier misschien aan het fotonen-artikel waar de energie en de frequentie van lichtdeeltjes evenredig zijn.

Einstein vervolgt met een voorbeeld-oefening in verband met lichtdruk. Wordt een lichtbundel door een materieel oppervlak, zeg een spiegel, teruggekaatst of geabsorbeerd, dan ondervindt dat oppervlak een zekere druk waardoor het een impuls of krachtstoot verkrijgt. Dat elektromagnetische straling druk uitoefent, werd eerst door Maxwell voorspeld in 1871. Die stralingsdruk is natuurlijk erg zwak maar toch meetbaar[20].

Einstein geeft de relativistische uitdrukking voor de lichtdruk op een perfecte spiegel die zich met een constante snelheid beweegt van de lichtbron. Hij gebruikt de berekening als voorbeeld dat, *Alle problemen van optica van lichamen in beweging kunnen met de hier gebruikte methode opgelost worden.*

2.5.9

Elektrodynamica

In de twee laatste paragrafen keert Einstein zich naar de elektronentheorie en vindt aansluiting met de werken van Lorentz. Hij voegt brontermen bij de vergelijkingen van Maxwell, elektrische ladingen en stromen en ziet hoe die Maxwell-Lorentz vergelijkingen transformeren bij gebruik van de eerder gevonden transformatieregels voor elektrische en magnetische velden, zie 2.5.6. Einstein vindt *dat de elektrodynamica van lichamen in beweging volgens Lorentz, overeenkomt met het relativiteitsprincipe.* Elektrische lading is een invariant.

Einstein bekijkt de bewegingsvergelijking voor een (langzaam ver-

[20]Meestal wordt voor de eerste experimentele verificaties verwezen naar Lebedew (1900) en naar Nichols en Hull (1901).

sneld) elektron en vindt de Lorentz-kracht *als gevolg* van de transformatie-formules. Als er een elektrisch veld is in het referentiesysteem van het elektron, dan ondergaat dat elektron daarvan de elektrische kracht. Als dat systeem met een constante snelheid beweegt, dan ziet de waarnemer in rust zowel een elektrisch als een magnetisch veld werken op het elektron. Uit de resulterende bewegingsvergelijkingen haalt Einstein, naar goede gewoonte in het slot van het artikel, drie eigenschappen van de baan van het elektron die moeten toegankelijk zijn voor het experiment.

2.6

Het artikel over de equivalentie van energie en massa

Vanuit essentieel twee principes leidt Einstein een nieuwe mechanica af die in de limiet voor kleine snelheden de klassieke mechanica oplevert. Ook al was die mechanica nieuw, de gevolgen van lengtecontractie en tijdsvertraging waren al voorheen besproken. Een derde gevolg wordt besproken in een afzonderlijke (maar zeer korte) publicatie van Einstein en heeft de hele wereld betoverd. Zeker is de bijdrage van Einstein aan de natuurwetenschappen niet te herleiden tot het invoeren van enkele formules. Hij schrijft trouwens zelf eerder weinig formules uitvoerig neer. Toch zijn formules dikwijls wat overblijven van een gedachtengang en zijn ze gemakkelijk transporteerbaar naar verschillende domeinen en beelden. De uitdrukking $E = mc^2$ is zo een formule, die in de loop van de geschiedenis door velen vereenzelvigd werd met Einstein.

We beginnen met een confrontatie tussen concepten zoals begrepen in de klassieke mechanica, en de invariantie van de lichtsnelheid.

Veronderstel dat een object met een bepaalde massa langs een rechte lijn beweegt. We nemen aan dat er een kracht op werkt in de richting van zijn beweging. Volgens Newton is de kracht evenredig met de verandering in snelheid of, de kracht is altijd gelijk voor

een gelijke verandering in snelheid over een gelijk tijdsinterval. Het maakt dus niet uit of de snelheid groot of klein is, de kracht nodig om de snelheid met een bepaalde waarde te veranderen, is enkel afhankelijk van de massa van het voorwerp. Nu blijkt dit helemaal niet meer zo te zijn in de relativiteitstheorie. Nu zal bij zeer hoge snelheid (in de buurt van de lichtsnelheid) een extreem grote kracht nodig zijn om de snelheid te veranderen. Dat is niet verrassend: licht heeft de grootst mogelijke snelheid; deze nog verhogen is onmogelijk en hoe dichter bij die snelheid, hoe moeilijker om er nog iets aan toe te voegen.

In de speciale relativiteitstheorie komt er een onderscheid tussen *rustmassa* en *massa*. Het is niet alleen zo dat een voorwerp een verandering in zijn beweging meer weerstaat als zijn rustmassa (massa in rust) groter wordt maar ook als zijn snelheid groter wordt. Met andere woorden, massa (in de zin van, weerstand tegen beweging) hangt zowel af van de rustmassa als van de snelheid. Dit kan experimenteel geverifieerd worden door krachten uit te oefenen op elementaire deeltjes die de snelheid van het licht benaderen. Deze experimenten in het begin van de 20ste eeuw zorgden voor verhitte discussies maar vooral het werk van Adolf Bucherer bevestigde de Lorentz-Einstein formule, dat de massa van elektronen bij hoge snelheid varieert als

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

waar m_0 de rustmassa is van het elektron en v diens snelheid. Bemerk dat als we nu schrijven dat $E = mc^2$, en we kijken voor eerder kleine waarden van v/c, dat dan

$$E = mc^2 \simeq m_0\,(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots)\,c^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

of het verschil tussen E en m_0c^2 benadert de klassieke kinetische energie.

Nu komt een veralgemening. We weten dat snelheid bijdraagt tot zogenaamde bewegingsenergie (of, kinetische energie). We kunnen het voorgaande dus ook formuleren als dat de weerstand ten opzichte van verandering in beweging toeneemt met grotere kinetische

energie. Maar uit de thermodynamica weten we dat energie, ook al is die behouden, verschillende vormen kan aannemen en uit de kinetische gastheorie weten we dat bijvoorbeeld warmte een vorm van kinetische energie is. De veralgemening dringt zich dus op: zijn niet alle vormen van energie, en dus niet enkel kinetische energie, een weerstand tegen verandering van beweging. Of *tout court*, is niet energie een vorm van massa?

De relativiteitstheorie gaat verder dan enkel deze speculatie maar leidt uit de basisprincipes af dat inderdaad alle energie verandering in beweging weerstaat. Een stuk ijzer weegt meer wanneer het gloeiend heet is dan als het koud is; zonnestralen hebben massa en de zon en alle sterren verliezen massa door energie uit te stralen. Er blijft slechts één behoudswet over: er is geen essentieel onderscheid meer tussen massa en energie. Een meer moderne (en betere) afleiding van de equivalentie van massa en energie is precies enkel gebaseerd op de combinatie van de Lorentztranformaties met de aanname van het behoud van impuls en energie waarin

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$$

het nieuwe verband voorstelt tussen energie E en impuls p. Het is immers te onderstrepen dat het concept van kracht, zoals we het hierboven hebben gebruikt, niet langer dezelfde betekenis kan hebben als in de klassieke mechanica. Dat heeft te maken met het feit dat kracht, wanneer begrepen in een beperkte en klassieke zin, een gegeven functie van alle deeltjesposities kan zijn en dat is moeilijk vol te houden in de speciale relativiteitstheorie.

Hierboven hebben wij, verhalend, gesuggereerd dat het onderscheid tussen energie en massa artificieel (of klassiek) is. In het artikel uit 1905 argumenteert Einstein elektrodynamisch. Zoals hij in zijn eerste zin schrijft, de resultaten van zijn vorig artikel *leiden tot een zeer interessante gevolgtrekking.* Een voorwerp zendt licht uit en Einstein schrijft de balans op van de energie voor en de energie na het uitzenden van de energie. Hij doet dat voor een stelsel in rust en voor een stelsel dat beweegt met constante snelheid. Het verschil tussen beide (rust en beweging) is essentieel gelijk aan kinetische energie. Einstein past de transformatieformules toe voor

de energie en hij besluit dat de kinetische energie van het voorwerp ten opzichte van het bewegende stelsel afneemt ten gevolge van de lichtstraling. Dan komt de veralgemening: *De massa van een lichaam is een maat voor zijn energieinhoud.*

Kijken we nog eens naar het licht. Licht plant zich voort met de snelheid c en transporteert daarmee energie. Het is zinvol om aan de straling ook een impuls toe te schrijven en wel zo dat voor een afgesloten systeem, dat zowel straling als materiële delen bevat, de totale impuls onveranderd zal blijven. De vergelijking van Maxwell tonen echter dat aan een evenwijdige lichtbundel die een energie E bevat, een impuls in de richting van het licht ter grootte E/c toe te kennen is. Maar impuls is massa maal snelheid, dus moet de lichtbundel ook massa hebben, en wel E/c^2. Als een lichaam de energie E afgeeft in de vorm van straling, vermindert zijn massa met E/c^2.

Met de veralgemening van Einstein komen natuurlijk heel nieuwe wegen in zicht. Het aanvankelijk als theoretische veronderstelling ingevoerde principe van de equivalentie van massa en energie is nu een experimenteel volledig bevestigde wet met onder andere belangrijke concrete gevolgen voor de stralings- en kernfysica.

Hoofdstuk 3

De werken van Einstein

Vertaling door Frans A. Cerulus[1] van de publicaties uit 1905

3.1 Ter inleiding

Het wonderjaar In 1905 is Albert Einstein 26 jaar en sinds drie jaar werkzaam in het patentbureau in Bern. Sinds 1901 publiceert hij ongeveer om het jaar een artikel in het gerenommeerde tijdschrift *Annalen der Physik*: over capillariteit, kinetische gastheorie, toegepaste en fundamentele thermodynamica.

In 1905 dient hij zijn doctoraatsproefschrift in aan de universiteit Zurich, over de bepaling van de grootte van atomen[2]. Maar bovendien stuurt hij datzelfde jaar vijf artikelen naar de *Annalen*, waarvan de eerste vier — die in datzelfde jaar verschijnen — bijzonder beroemd werden:

[1] em. gew. hoogleraar, Instituut voor Theoretische Fysica, K.U.Leuven, Celestijnenlaan 200D, B-3001 Heverlee. E-mail: `frans.cerulus@fys.kuleuven.ac.be`

[2] Het is zijn eerste publicatie in 1905, doch overlapt grotendeels met het tweede artikel in de *Annalen*, en is derhalve niet opgenomen in deze bundel.

1. Hij denkt de consequenties door van de hypothese der energiekwanta, fundeert die in bestaande wetten en voorspelt eigenschappen van licht en elektronen in wisselwerking (foto-elektrisch effect en elektroluminescentie).

2. Hij verklaart de Brownse beweging uit de beweging der moleculen t.g.v. de warmte en geeft het theoretische kader van het sluitende bewijs voor het bestaan van atomen.

3. Hij herinterpreteert de elektrontheorie van Lorentz, toont door geniaal-eenvoudige "Gedankenexperimente" dat we onze begrippen van ruimte en tijd moeten herzien en brengt een eengemaakte theorie van mechanische en elektromagnetische fenomenen: de (speciale) relativiteitstheorie.

4. Als een vervolg op het voorgaande toont hij de equivalentie van massa en energie, later geformuleerd als $E = mc^2$.

Derhalve ziet de wereldgemeenschap van fysici 1905 als het "wonderjaar", als het ware het geboortejaar van de kwantummechanica, de statistische mechanica en de relativiteitstheorie, drie hoekstenen van de moderne fysica[3].

Ter rechtvaardiging De student van 2005 heeft keuze te over om zich vertrouwd te maken met deze pijlers van de fysica. Generaties theoretici hebben hun beste didactische vaardigheden er op aangescherpt en tonen met begeestering die wonderlijke meesterwerken van de menselijke geest, de mathematische elegantie, de filosofische gevolgen voor de noties van tijd en ruimte, van onzekerheid en voorspelbaarheid.

---

[3]Verdere achtergrondinformatie is te vinden o.a. in de volgende werken:

1. Abraham Pais, *"Subtle is the Lord…", The Science and the Life of Albert Einstein*, Clarendon Press, Oxford. 1982.

2. *The collected papers of Albert Einstein; Vol.2; The Swiss years: writings, 1900-1909.* Princeton University Press, Princeton. 1989.

3. *Albert Einstein Œuvres Choisies, publiées sous la direction de Françoise Balibar,* Seuil/CNRS, Paris, 1993.

Men zou vergeten dat dit bouwwerk ooit in de steigers stond, dat het ook niet in één keer uit het brein van Einstein ontsproot, dat het meegegroeid is met onze kennis van wiskunde en fysica.

Men zou erbij vergeten dat die doorwrochte theorieën ooit geniale knutselwerken waren en onze jeugdige student, die zich misschien ook zoals de jonge Einstein vragen stelt waar hij geen direct antwoord op heeft, zou moedeloos kunnen worden bij al die perfectie en verzaken aan het zelf knutselen. Dan zeg ik: lees de oorspronkelijke tekst, snuif de geur van het pas ontloken idee op, vergelijk de jonge bloem met de voldragen vrucht uit het handboek.

Toelichting over de vertaling. Einstein schreef in zijn moedertaal, het Duits van 100 jaar geleden; geen droog geleerdentaaltje maar een tekst in die beruchte Duitse stijl met ineengeschoven hoofd- en bijzinnen, met ruim gebruik van de "Konjunktiv".

Die stijl heeft een reden. In 1905 is Einstein een welhaast onbekend auteur. Maar dat jaar komt hij met bijzonder originele nieuwe denkbeelden. Hij wil die heel precies formuleren, met alle voorzorgen; duidelijk maken waar hij hypotheses maakt, hoe waarschijnlijk die zijn, wat de mogelijke grenzen zijn van de nieuwe ideeën. Vandaar de vele voorwaardelijkheden, uitgedrukt in bijzinnen en werkwoorden in "Konjuktiv". De moderne lezer, opgegroeid met de ideeën die hier voor het eerst, soms nog aarzelend, geformuleerd werden, en ondertussen gewend aan een meer directe en bondige stijl zal zich daarbij onwennig voelen, maar tegelijkertijd moeten aanvoelen hoe nieuw het toen allemaal was en hoe ongehoord vermetel voor een jonge man om dit te publiceren. Maar hij zal ook kunnen smaken hoe onberispelijk logisch Einstein dacht.

Ik heb gepoogd het origineel trouw te volgen. De indeling in paragrafen is exact overgenomen, de formules zien er net zo uit als in het origineel. Alleen zijn de voetnoten nu doorlopend genummerd, terwijl ze in de *Ann. d. Phys.* per pagina genummerd zijn. Ook de uitdrukking van de ideeën en hun verband werd zo trouw mogelijk weergegeven; een bepaald Duits woord (b.v. *erzeugen*) is steeds door hetzelfde Nederlands woord (produceren) vertaald, een

Duits synoniem (*erregen*) door steeds hetzelfde Nederlands synoniem (opwekken). De lezer zal ongetwijfeld enige Duits klinkende wendingen moeten dulden.

De Duitse stijl is echter niet om te zetten in een verteerbaar Nederlands. Sommige langere zinnen heb ik dus in stukken gesneden en de conjunctief en conditionalis meestal vervangen door het binnensmokkelen van woorden zoals: “onderstel dat”, “op voorwaarde dat”, “neem b.v.”, enz. Behalve deze ingrepen heb ik, bij het opsplitsen van zinnen, soms woorden toegevoegd; die zijn aangeduid door vierkante haken [].

Maar voor de rest hoop ik dat de charme van die eerste neerslag van de ideeën van Einstein ook in de vertaling voelbaar blijft.

Mijn oprechte dank gaat uit naar de heer Geert Craps voor zijn waardevolle raad i.v.m. Nederlands taaleigen; voor de fouten ben ik alleen verantwoordelijk.

F.Cerulus
Heverlee, december 2004.

3.2

Over een heuristisch gezichtspunt aangaande de productie en de omvorming van licht

door A. Einstein.

Annalen der Physik, **17** pp. 132-148

Er bestaat een diepliggend formeel verschil tussen het theoretische beeld dat fysici zich gevormd hebben van, enerzijds, gassen en andere ponderabele[4] lichamen en anderzijds de Maxwelliaanse theorie van elektromagnetische processen in de zogenaamde lege ruimte. De toestand van een lichaam aanzien we als volkomen bepaald door de posities en snelheden van een, weliswaar zeer groot doch eindig, aantal atomen en elektronen; [van de andere kant] gebruiken we voor de bepaling van de elektromagnetische toestand van een ruimte continue ruimtelijke functies zodat dus een eindig aantal grootheden niet geacht kan worden de elektromagnetische toestand van een ruimte volledig vast te leggen. Volgens de Maxwelliaanse theorie is bij alle zuiver elektromagnetische verschijnselen, dus ook bij licht, de energie op te vatten als een continue functie op de ruimte; daarentegen is de energie van ponderabele lichamen, volgens de huidige opvatting van de fysici, voor te stellen als een som over de atomen en elektronen. De energie van een ponderabel lichaam kan niet in willekeurig vele, naar believen kleine, delen uiteen vallen; terwijl de energie van de door een puntvormige lichtbron uitgezonden lichtstralen volgens de Maxwelliaanse theorie (en meer algemeen volgens elke golftheorie) continu verdeeld wordt over een steeds toenemend volume.

De golftheorie van het licht, die werkt met continue functies op de ruimte, voldoet voortreffelijk voor het beschrijven van zuiver optische verschijnselen en zal wel nooit door een andere theorie

[4] *ponderabel: wat gewicht heeft [noot van de vertaler].*

vervangen worden. Men moet echter wel voor ogen houden dat optische waarnemingen betrekking hebben op gemiddelden over de tijd en niet op ogenblikkelijke waarden; hoewel de theorie volledig door het experiment bevestigd wordt bij buiging, weerkaatsing, breking, dispersie, enz., is het denkbaar dat die lichttheorie die met continue functies op de ruimte werkt, tot tegenspraak met de ondervinding leidt bij toepassing op de verschijnselen van de opwekking en de omvorming van licht.
Het komt me inderdaad voor dat waarnemingen betreffende "zwarte straling", fotoluminescentie, de opwekking van kathodestralen door ultraviolet licht en andere groepen van verschijnselen rond de opwekking en omvorming van licht, beter begrepen kunnen worden met de onderstelling dat de energie van licht discontinu in de ruime verdeeld is. Volgens deze onderstelling, die we nader zullen bekijken, is bij de uitbreiding van een lichtstraal die uit een punt vertrekt, haar energie niet continu over groter en groter wordende ruimtes verdeeld; veeleer bestaat deze uit een eindig aantal energiekwanta, gelokaliseerd in punten van de ruimte, die voortbewegen zonder zich te delen en enkel als geheel kunnen geabsorbeerd of opgewekt worden.
In hetgeen volgt, wil ik de gedachtegang en de feiten kenbaar maken die me op dit pad gebracht hebben in de hoop dat het standpunt dat we zullen uiteenzetten, bruikbaar zal blijken voor enige onderzoekers bij hun onderzoek.

§1. Over een moeilijkheid aangaande de theorie van de "zwarte straling"

We stellen ons vooreerst op het standpunt van de Maxwelliaanse theorie en de elektronentheorie en beschouwen het volgende geval. In een ruimte omsloten door volkomen weerkaatsende wanden bevinden zich een aantal gasmoleculen en elektronen; deze bewegen zich vrij en oefenen conservatieve krachten op elkaar uit als ze elkaar zeer nabij komen, d.w.z. dat ze met elkaar in botsing kunnen komen zoals gasmoleculen in de kinetische gastheorie[5]. Verder zij

[5]Deze hypothese betekent zoveel als de onderstelling dat de gemiddelde kinetische energieën van gasmoleculen en elektronen bij temperatuurevenwicht

een aantal elektronen vastgeketend aan ver van elkaar verwijderde punten door krachten naar deze punten toe gericht die proportioneel zijn met de uitwijking. Ook deze elektronen treden met de vrije moleculen en elektronen in conservatieve wisselwerking als ze de laatsten dichtbij komen. We noemen de elektronen geketend aan ruimtelijke punten "resonatoren"; ze zenden elektromagnetische golven van een welbepaalde periode uit en absorberen die ook. Volgens de huidige opvatting over het ontstaan van licht, moet de straling in bedoelde ruimte, zoals ze gevonden wordt op basis van de Maxwelliaanse theorie voor het geval van dynamisch evenwicht, identiek zijn met de "zwarte straling"; tenminste als resonatoren voor alle te beschouwen frequenties aanwezig verondersteld worden. We zien voorlopig af van de door de resonatoren uitgezonden of geabsorbeerde straling en vragen naar de voorwaarde die overeenkomt met dynamisch evenwicht bij de wisselwerking van moleculen en elektronen (de botsingen). Voor dit dynamische evenwicht levert de kinetische gastheorie als voorwaarde dat de gemiddelde levende kracht van een resonatorelektron gelijk moet zijn aan de gemiddelde kinetische energie van translatie[6] van een gasmolecule. Splitsen we de beweging van een resonatorelektron op in drie onderling loodrechte trillingsbewegingen, dan vinden we voor de gemiddelde energie $\bar{E}$ van een dergelijke rechtlijnige trillingsbeweging

$$\bar{E} = \frac{R}{N} T$$

waar R de absolute gasconstante betekent, N het aantal "werkelijke moleculen" in een gramequivalent en T de absolute temperatuur. De energie $\bar{E}$ is namelijk, vanwege de gelijkheid van de gemiddelden over de tijd van de kinetische en de potentiële energie van een resonator, 2/3 keer zo groot als de levende kracht van een vrije, eenatomige gasmolecule. Als nu door een of andere oorzaak — in ons geval door straling — bewerkt wordt dat de energie van een resonator een groter of kleiner gemiddelde over de tijd aanneemt dan $\bar{E}$, dan zouden de botsingen met de vrije moleculen en

aan elkaar gelijk zijn. Met de hulp van deze laatste onderstelling heeft de heer Drude, zoals bekend, de verhouding van elektrisch en thermisch geleidingsvermogen van metalen langs theoretische weg afgeleid.

[6] *Duits:* fortschreitende Bewegung *noot van vertaler*

elektronen aanleiding geven tot energieafgiften aan het gas, resp. energieopnamen, die gemiddeld van nul verschillen. In het geval dat we beschouwen is het dynamisch evenwicht alleen dan mogelijk als elke resonator de gemiddelde energie $\bar{E}$ bezit.
We maken nu een gelijkaardige beschouwing aangaande de wisselwerking van de resonatoren en de straling die in de ruimte aanwezig is. De heer Planck heeft voor dit geval de voorwaarde voor dynamisch evenwicht afgeleid[7] met de onderstelling dat straling als een uiterst ongeordende proces[8] kan opgevat worden. Hij vond:

$$\bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2}\,\varrho_\nu .$$

Hierbij is $\bar{E}_\nu$ de gemiddelde energie van een resonator van de eigenfrequentie ν (per component van de trilling), L is de lichtsnelheid, ν de frequentie en $\rho_\nu d\nu$ de energie per eenheid van volume voor

[7]M. Planck, Ann.d.Phys. **1.** p.99. 1900.

[8]Deze voorwaarde kan als volgt geformuleerd worden. We ontwikkelen de Z-componente van de elektrische kracht (Z) in een vrij te kiezen punt van de betreffende ruimte tussen de tijdsgrenzen $t = 0$ en $t = T$ (waarbij T een zeer grote tijd is tegenover alle in aanmerking te nemen trillingstijden) in een Fourierreeks

$$Z = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \sin(2\pi\nu\frac{t}{T} + \alpha_\nu)$$

waar $A_\nu \geqq 0$ en $0 \leqq \alpha_\nu \leqq 2\pi$. Als men zich indenkt dat in hetzelfde punt van de ruimte willekeurig vaak een dergelijke ontwikkeling uitgevoerd wordt met toevallig gekozen beginpunten voor de tijd, dan zal men voor de grootheden A_ν en α_ν verschillende waardesystemen krijgen. Dan bestaan er voor de verschillende combinaties van waarden der grootheden A_ν en α_ν (statistische) waarschijnlijkheden dW van de vorm:

$$dW = f(A_1 A_2 \ldots \alpha_1 \alpha_2 \ldots) dA_1 dA_2 \ldots d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots$$

De straling is dan een uiterst ongeordende als

$$f(A_1 A_2 \ldots \alpha_1 \alpha_2 \ldots) = F_1(A_1) F_2(A_2) \ldots f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2) \ldots,$$

d.w.z. als de waarschijnlijkheid voor een bepaalde waarde van een der grootheden A, resp. α, onafhankelijk is van de waarde die de andere A, resp. α, bezitten. Met hoe grotere benadering het opgaat dat de individuele paren grootheden A_ν en α_ν afhangen van *bijzondere* groepen resonatoren, met des te grotere benadering zal in ons geval de straling te beschouwen zijn als een "uiterst ongeordende".

dat deel van de straling waarvan de frequentie tussen ν en $\nu + d\nu$ ligt.
Wil de stralingsenergie met frequentie ν niet bestendig in haar geheel vermeerderd of verminderd worden, moet gelden:

$$\frac{R}{N}T = \bar{E} = \bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2}\rho_\nu,$$

$$\rho_\nu = \frac{R}{N}\frac{8\pi\nu^2}{L^3}T.$$

Deze [zojuist] gevonden betrekking als voorwaarde voor dynamisch evenwicht mist niet alleen de overeenstemming met de ondervinding maar ze betekent ook dat in ons beeld er geen sprake kan zijn van een bepaalde energieverdeling tussen ether en materie. Hoe ruimer namelijk het bereik van de trillingsgetallen gekozen wordt, hoe groter de stralingsenergie van de ruimte wordt, en we krijgen in het grensgeval

$$\int_0^\infty \varrho_\nu d\nu = \frac{R}{N}\frac{8\pi}{L^3}T\int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty.$$

§2. Over de bepaling van de elementaire kwanta door Planck

In het volgende willen we aantonen dat de bepaling van de elementaire kwanta door de heer Planck tot op zekere hoogte onafhankelijk is van de door hem opgestelde theorie van de "zwarte straling".
De formule[9] van Planck voor ϱ_ν, die overeenstemt met alle ondervindingen tot nu toe, luidt:

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha\nu^3}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1},$$

waarbij

$$\alpha = 6,10\ .10^{-56}$$

[9]M. Planck, Ann. d. Phys. **1.** p.561. 1901.

$$\beta = 4,866\,.10^{-11}.$$

Voor grote waarden van T/ν, d.w.z. voor grote golflengten en stralingsdichtheden, gaat deze formule in de limiet over in de volgende:

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha}{\beta}\nu^2 T.$$

Men ziet in dat deze formule overeenstemt met deze ontwikkeld in §1 uit de Maxwelliaanse en de elektronentheorie. Door de coëfficienten gelijk te stellen in beide formules, krijgt men:

$$\frac{R}{N}\frac{8\pi}{L^3} = \frac{\alpha}{\beta}$$

of nog

$$N = \frac{\beta}{\alpha}\frac{8\pi R}{L^3} = 6,17\,.\,10^{23},$$

d.w.z. een atoom waterstof weegt $1/N$ gram $= 1,62\,.\,10^{-24}$g. Dat is net de waarde gevonden door de heer Planck, die bevredigend overeenkomt met waarden voor deze grootheid die langs een andere weg gevonden zijn.

Zo komen we tot het besluit: hoe groter de energiedichtheid en de golflengte van de straling is, des te bruikbaarder blijkt de theoretische basis door ons gebruikt te zijn; maar ze schiet volledig te kort voor kleine golflengten en kleine stralingsdichtheden.

In hetgeen volgt zal de “zwarte straling” beschouwd worden in aansluiting met de ondervinding en zonder dat gesteund wordt op een beeld van de productie en uitbreiding van de straling.

§3. Over de entropie van de straling

De volgende beschouwing komt uit een beroemd werk van de heer Wien, en wordt hier enkel voor de volledigheid overgenomen.

Gegeven een straling die het volume v inneemt. We nemen aan dat de waarneembare eigenschappen van de voorhanden straling volkomen bepaald zijn als de stralingsdichtheid $\varrho(\nu)$ gegeven is voor alle frequenties[10]. Stralingen van verschillende frequenties kunnen

[10] Dit is een willekeurige hypothese. Men gaat deze eenvoudigste hypothese van nature uit zo lang aanhouden tot het experiment dwingt ze te verlaten.

als van elkaar scheidbaar beschouwd worden zonder arbeid te verrichten of warmte toe te voeren; dan is de entropie van de straling voor te stellen als

$$S = v\int_0^\infty \varphi(\varrho,\nu)d\nu$$

waarbij φ een functie beduidt van de variabelen ϱ en ν. φ kan herleid worden tot een functie van één enkele veranderlijke door in de formules weer te geven dat door adiabatische compressie van straling tussen spiegelende wanden haar entropie niet veranderd wordt. We gaan hierop echter niet in maar zodadelijk onderzoeken we hoe de functie φ uit de stralingswet van het zwarte lichaam kan verkregen worden.
Bij de "zwarte straling" is ϱ een zodanige functie van ν dat bij gegeven energie de entropie een maximum is, d.w.z. dat

$$\delta\int_0^\infty \varphi(\varrho,\nu)d\nu = 0,$$

als

$$\delta\int_0^\infty \varrho d\nu \qquad\qquad = 0.$$

Hieruit volgt voor elke keus van $\delta\varrho$ als functie van ν

$$\int_0^\infty (\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} - \lambda)\delta\varrho\, d\nu = 0,$$

waarbij λ onafhankelijk van ν is. Bij de zwarte straling is dus $\partial\varphi/\partial\varrho$ onafhankelijk van ν.
Voor de temperatuurstijging dT van een zwarte straling met volume $v = 1$ geldt de vergelijking:

$$dS = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} d\varrho\, d\nu,$$

ofwel, daar $\partial\varphi/\partial\varrho$ onafhankelijk van ν is:

$$dS = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} dE.$$

Omdat dE gelijk is aan de toegevoegde warmte en het proces omkeerbaar is, geldt ook:

$$dS = \frac{1}{T} dE.$$

Door vergelijken krijgt men:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{1}{T}.$$

Dat is de wet van de zwarte straling. Men kan dus uit de functie φ de wet van de zwarte straling bepalen en omgekeerd uit deze laatste de functie φ door integratie verkrijgen, rekening houdend met [de voorwaarde] dat φ nul wordt voor $\varrho = 0$.

§4. Wet voor de entropie in het limietgeval van monochromatische straling en geringe stralingsdichtheid

Uit de waarnemingen tot nu toe komt weliswaar naar voor dat de oorspronkelijk door de heer Wien opgestelde wet voor de "zwarte straling"

$$\varrho = \alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$$

niet nauwkeurig geldig is. Dezelfde formule werd echter voor grote waarden van ν/T zeer volkomen bevestigd door het experiment. We leggen deze formule ten grondslag aan onze berekeningen, maar houden in gedachte dat onze resultaten maar geldig zijn binnen bepaalde grenzen.
Uit deze formule volgt vooreerst:

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta\nu}\lg\frac{\varrho}{\alpha\nu^3}$$

en verder met gebruik van de betrekking gevonden in de vorige paragraaf:

$$\varphi(\varrho,\nu) = -\frac{\varrho}{\beta\nu}\{\lg\frac{\varrho}{\alpha\nu^3} - 1\}.$$

Zij nu een straling gegeven met energie E waarvan de frequentie tussen ν en $\nu + d\nu$ ligt. De straling neemt, onderstellen we, het volume v in. De entropie van deze straling is:

$$S = v\varphi(\varrho,\nu)d\nu = -\frac{E}{\beta\nu}\left\{\lg\frac{E}{v\alpha\nu^3 d\nu} - 1\right\}.$$

Als we ons beperken tot het onderzoek hoe de entropie van de straling afhangt van het volume dat ze inneemt en we geven de entropie van de straling aan met S_0 als deze het volume v_0 inneemt, dan krijgen we:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \lg(\frac{v}{v_0}).$$

Deze vergelijking toont aan dat de entropie van monochromatische straling met voldoend kleine dichtheid volgens dezelfde wet varieert met het volume als de entropie van een ideaal gas of een verdunde oplossing. De zojuist gevonden vergelijking zullen we in hetgeen volgt interpreteren op basis van het principe door de heer Boltzmann in de fysica binnengebracht; dit luidt: de entropie van een systeem is een functie van de waarschijnlijkheid van zijn toestand.

§5. Moleculair-theoretisch onderzoek naar de entropie van gassen en verdunde oplossingen in haar afhankelijkheid van het volume

Bij de berekening van entropie langs de weg van de moleculaire theorie wordt vaak het woord "waarschijnlijkheid" gebruikt in een betekenis die niet strookt met de definitie zoals ze in de waarschijnlijkheidsrekening gegeven wordt. In het bijzonder worden de "gevallen van gelijke waarschijnlijkheid" dikwijls als hypothese vastgelegd in gevallen waar de gebruikte theoretische beelden [eigenlijk] voldoende omlijnd zijn om een deductie toe te laten, eerder dan op een hypothese beroep te doen. Ik neem me voor in een afzonderlijk werk aan te tonen dat de "statistische waarschijnlijkheid" volkomen toereikend is bij beschouwingen over thermische processen; daardoor hoop ik een logische moeilijkheid op te ruimen die het doorvoeren van het principe van Boltzmann nog in de weg staat. Hier zal alleen diens algemene formulering en zijn toepassing op heel speciale gevallen gegeven worden.
Als het zin heeft over de waarschijnlijkheid van de toestand van een systeem te spreken, als verder elke toename van entropie kan opgevat worden als een overgang naar een meer waarschijnlijke toestand, dan is de entropie S_1 van een systeem een functie van de waarschijnlijkheid W_1 van zijn ogenblikkelijke toestand.

Als dan twee systemen voorhanden zijn, S_1 en S_2, die niet in wisselwerking staan, kan men stellen:

$$S_1 = \varphi_1(W_1),$$

$$S_2 = \varphi_2(W_2).$$

Als men de beide systemen als een enkel systeem aanziet met entropie S en waarschijnlijkheid W, dan is:

$$S = S_1 + S_2 = \varphi(W)$$

en

$$W = W_1.W_2.$$

De laatste betrekking betekent dat de toestanden van beide systemen van elkaar onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
Uit deze vergelijkingen volgt:

$$\varphi(W_1.W_2) = \varphi(W_1) + \varphi(W_2)$$

en hieruit tot slot

$$\begin{aligned} \varphi(W_1) &= C \lg(W_1) + \text{ const.}, \\ \varphi(W_2) &= C \lg(W_2) + \text{ const.}, \\ \varphi(W\ ) &= C \lg(W\ ) + \text{ const.} \end{aligned}$$

De grootheid C is een universele constante, het volgt uit de kinetische gastheorie dat ze de waarde R/N heeft, waarbij aan de constanten R en N dezelfde betekenis te hechten is als hierboven. Als S_0 de entropie betekent bij een bepaalde begintoestand van een beschouwd systeem en W de relatieve waarschijnlijkheid van een toestand met entropie S, dan krijgen we dus algemeen:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg W.$$

We behandelen vooreerst het volgende speciaal geval. In een volume v_0 bevinden zich een aantal (n) beweegbare punten (bv. moleculen) waarop onze redenering gaat betrekking hebben. Buiten deze kunnen in de ruimte nog willekeurig vele andere beweegbare punten, van welke aard ook, aanwezig zijn. We onderstellen niets

over de wet waaronder de in aanmerking genomen punten bewegen in de ruimte, tenzij dat — wat die beweging betreft — geen deel van de ruimte (en geen richting) verkozen is boven de andere. Het aantal beschouwde (eerst vermelde) beweegbare punten is verder zo klein dat we kunnen afzien van de inwerking van de punten op elkaar.

Het beschouwde systeem, dit kan b.v. een ideaal gas zijn of een verdunde oplossing, heeft een bepaalde entropie S_0. We stellen ons een deel voor, met grootte v, van het volume v_0 en alle n beweegbare punten verplaatst in volume v, wijl verder niets veranderd wordt aan het systeem. Deze toestand heeft kennelijk een andere waarde van de entropie (S), en we gaan nu het entropieverschil bepalen met behulp van het principe van Boltzmann.

We stellen ons de vraag: hoe groot is de waarschijnlijkheid van de laatst vermelde toestand relatief tot de oorspronkelijke? Of nog: hoe groot is de waarschijnlijkheid dat alle n in een gegeven volume v_0 onafhankelijk van elkaar beweegbare punten zich op een willekeurig gekozen moment van de tijd (toevallig) in het volume v bevinden?

Voor deze waarschijnlijkheid, die een "statistische waarschijnlijkheid" is, krijgt men duidelijk de waarde:

$$W = (\frac{v}{v_0})^n;$$

en hieruit krijgt men door toepassen van het principe van Boltzmann:

$$S - S_0 = R(\frac{n}{N}) \lg(\frac{v}{v_0}).$$

Uit deze vergelijking kan men eenvoudig de wet van Boyle-Gay-Lussac en de gelijkluidende wet van de osmotische druk thermodynamisch afleiden[11]; het is opmerkelijk dat men bij het afleiden

[11] Als E de energie van het systeem is, dan bekomt men:

$$-d(E - TS) = pdv = TdS = R\frac{n}{N}\frac{dv}{v}:$$

en dus

$$pv = R\frac{n}{N}T.$$

van deze vergelijking geen onderstelling hoeft te maken over de wet waarmee de moleculen bewegen.

§6. Interpretatie van de uitdrukking voor de afhankelijkheid van de entropie der monochromatische straling van het volume, volgens het principe van Boltzmann

In §4 hebben we voor de afhankelijkheid der entropie van de monochromatische straling van het volume de [volgende] uitdrukking gevonden:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \lg(\frac{v}{v_0}).$$

Schrijft men dit in de vorm:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg[(\frac{v}{v_0})^{\frac{N}{R}\frac{E}{\beta\nu}}]$$

en vergelijkt men dat met de algemene formule die het principe van Boltzmann uitdrukt

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg W,$$

dan komt men tot het volgende besluit:
Als monochromatische straling met frequentie ν en energie E ingesloten is (door spiegelende wanden) in het volume v_0, dan is de waarschijnlijkheid dat op een willekeurig gekozen moment in de tijd de gehele stralingsenergie in het deelvolume v van v_0 voorkomt:

$$W = (\frac{v}{v_0})^{\frac{N}{R}\frac{E}{\beta\nu}}.$$

Hieruit besluiten we verder:
Monochromatische straling van geringe dichtheid (binnen het geldigheidsgebied van de stralingsformule van Wien) gedraagt zich in verband met de theorie van de warmte alsof ze zou bestaan uit van elkaar onafhankelijke energiekwanta met grootte $R\beta\nu/N$.
We willen nog de gemiddelde grootte van de energiekwanta der "zwarte straling" vergelijken met de gemiddelde levende kracht

van de beweging van het zwaartepunt van een molecule bij dezelfde temperatuur. Deze laatste is $\frac{3}{2}(R/N)T$, terwijl men voor de gemiddelde grootte van het energiekwantum, op basis van de formule van Wien, krijgt:

$$\frac{\int_0^\infty \alpha\nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} d\nu}{\int_0^\infty \frac{N}{R\beta\nu}\alpha\nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} d\nu} = 3\frac{R}{N}T.$$

Als nu monochromatische straling (van voldoend kleine dichtheid), wat betreft de afhankelijkheid van entropie van het volume, zich als een discontinu medium gedraagt dat uit energiekwanta ter grootte van $R\beta\nu/N$ bestaat, dan ligt het voor de hand te onderzoeken of de wetten voor de productie[12] en omvorming van licht zo gesteld zijn alsof het licht uit dergelijke energiekwanta zou bestaan. Met deze vraag zullen we ons bezig houden in hetgeen volgt.

§7. Over de regel van Stokes

Monochromatisch licht wordt, nemen we aan, door fotoluminescentie omgezet in licht van een andere frequentie; overeenkomstig het resultaat van daarnet wordt ondersteld dat zowel het producerende als het opgewekte licht uit energiekwanta bestaan ter grootte van $(R/N)\beta\nu$, waar ν de betreffende frequentie betekent. Het omvormingsproces kan dan als volgt geduid worden. Elk producerend energiekwantum met frequentie ν_1 wordt geabsorbeerd en geeft — ten minste bij voldoend kleine verdelingsdichtheid van de producerende energiekwanta — op zichzelf aanleiding tot het ontstaan van een lichtkwantum met frequentie ν_2; eventueel kunnen bij de absorptie van het producerende lichtkwantum tegelijkertijd ook lichtkwanta met frequenties ν_3, ν_4 enz. ontstaan, evenals energie van een andere soort (b.v. warmte).
Het heeft geen belang door bemiddeling van welke tussenprocessen het eindresultaat tot stand komt. Als de fotoluminescerende stof niet als een permanente bron van energie beschouwd kan worden, dan kan, volgens het energieprincipe, de energie van een opgewekt

[12] *Duits:* Erzeugung *[noot van de vertaler].*

lichtkwantum niet groter zijn dan die van een producerend kwantum; de volgende karakterisering moet dan geldig zijn:

$$\frac{R}{N}\beta\nu_2 \leqq \frac{R}{N}\beta\nu_1$$

ofwel

$$\nu_2 \leqq \nu_1.$$

Dit is de bekende regel van Stokes.
Speciaal moet benadrukt worden dat bij zwakke belichting de opgewekte hoeveelheid licht, volgens onze opvatting, proportioneel moet zijn aan de opwekkende, bij anderszins gelijke omstandigheden; elk van de producerende energiekwanta veroorzaakt immers een elementair proces, van de hoger aangeduide soort, onafhankelijk van de andere producerende energiekwanta. In het bijzonder zal er geen benedengrens voor de intensiteit van het producerende licht bestaan, waaronder het licht niet in staat zou zijn licht op te wekken.
Volgens de uiteengezette opvatting zijn afwijkingen van de regel van Stokes denkbaar in de volgende gevallen:
1. als het aantal energiekwanta die gelijktijdig in de omvorming begrepen zijn per volume-eenheid zo groot is dat een energiekwantum van het opgewekte licht zijn energie van meerdere producerende energiekwanta kan verkrijgen;
2. als het producerende (of het opgewekte) licht — wat zijn energie betreft — zo gesteld is dat het niet behoort bij een "zwarte straler" die tot het geldigheidsgebied behoort van de wet van Wien; als het opwekkende licht bv. geproduceerd wordt door een lichaam van een zo hoge temperatuur dat voor de in aanmerking komende golflengte de wet van Wien niet meer geldt.
Die laatste mogelijkheid verdient bijzondere aandacht. Volgens de hier ontwikkelde opvatting is het namelijk niet uitgesloten dat een "niet-Wiense straling", ook bij grote verdunning zich in energetisch opzicht anders gedraagt dan een "zwarte straling" die wel binnen het geldigheidsgebied van de wet van Wien [valt].

§8. Over de opwekking van kathodestralen door belichting van vaste lichamen

De gewone opvatting, dat de energie van het licht continu verdeeld is over de doorstraalde ruimte, ondervindt bijzonder grote moeilijkheden bij haar poging tot verklaring van lichtelektrische verschijnselen, zoals uiteengezet in een baanbrekend werk van de heer Lenard[13].

Volgens de opvatting dat het opwekkende licht bestaat uit energiekwanta met energie $(\frac{R}{N})\beta\nu$ kan de productie van kathodestralen door licht als volgt opgevat worden. In de oppervlaktelaag van het lichaam dringen energiekwanta in, en hun energie transformeert zich, minstens ten dele, in kinetische energie van elektronen. De eenvoudigste zienswijze is dat een lichtkwantum zijn hele energie aan één enkel elektron afgeeft; we zullen aannemen dat dit voorkomt. Het is echter niet uit te sluiten dat elektronen de energie van lichtkwanta slechts gedeeltelijk opnemen. Een elektron dat in het inwendige van het lichaam voorzien is van kinetische energie zal, als het het oppervlak bereikt heeft, een deel van zijn kinetische energie ingeboet hebben. Bovendien zal men moeten aannemen dat elk elektron, bij het verlaten van het lichaam, een arbeid P (karakteristiek voor het lichaam) moet leveren. Het zijn de elektronen die onmiddellijk aan het oppervlak opgewekt worden en het in de richting er loodrecht op verlaten, die met de grootste normaalsnelheid het lichaam verlaten. De kinetische energie van dergelijke elektronen is

$$\frac{R}{N}\beta\nu - P.$$

Is het lichaam opgeladen tot de positieve potentiaal Π en omgeven door geleiders op potentiaal nul, en is Π juist in staat een verlies aan elektriciteit van het lichaam te verhinderen, dan moet:

$$\Pi\varepsilon = \frac{R}{N}\beta\nu - P,$$

waarbij ε de elektrische massa van het elektron betekent, of nog

$$\Pi E = R\beta\nu - P',$$

[13] P. Lenard, Ann. d. Phys. p. 169 en 170. 1902.

waar E de lading van een gramequivalent is van een eenwaardig ion en P' de potentiaal van deze hoeveelheid negatieve elektriciteit met betrekking tot het lichaam[14].

Stelt men $E = 9,6 \,.\, 10^3$ dan is $\Pi \,.\, 10^{-8}$ de potentiaal in Volt, aangenomen door het lichaam bij bestraling in vacuum.

Om vooreerst te zien of de afgeleide betrekking overeen stemt, naar de orde van grootte, met de ondervinding, stellen we $P' = 0$, $\nu = 1,03 \,.\, 10^{15}$ (wat overeenstemt met de grens van het zonnespectrum naar het ultraviolet toe) en $\beta = 4,866 \,.\, 10^{-11}$. We krijgen $\Pi \,.\, 10^7 = 4,3$ Volt; dit resultaat stemt, naar orde van grootte, overeen met de resultaten van de heer Lenard[15].

Als de afgeleide formule juist is, dan moet Π, voorgesteld in Cartesische coördinaten als functie van de frequentie van het opwekkende licht, een rechte zijn waarvan de helling onafhankelijk is van de natuur van de onderzochte stof.

Onze opvatting staat niet, voorzover ik zie, in tegenspraak met de lichtelektrische werking, door de heer Lenard waargenomen. Als elk energiekwantum van het opwekkende licht, onafhankelijk van alle andere, zijn energie aan elektronen afgeeft, dan zal de snelheidsverdeling van de elektronen, d.w.z. de kwaliteit van de kathodestraling, onafhankelijk zijn van de intensiteit van het opwekkend licht; anderzijds zal het aantal elektronen die het lichaam verlaten evenredig zijn met de intensiteit van het opwekkende licht, bij voor het overige gelijke omstandigheden[16].

Over de vermoedelijke geldigheidsgrenzen van de aangehaalde wetmatigheden zou men gelijkaardige bemerkingen kunnen maken als over de vermoedelijke afwijkingen van de regel van Stokes.

In het voorgaande werd aangenomen dat minstens bij een deel van de energiekwanta van het opwekkende licht de energie telkens aan een enkel elektron volledig afgegeven wordt. Maakt men deze voor de hand liggende onderstelling niet, dan krijgt men in de plaats

[14] Als men aanneemt dat een enkel elektron door het licht uit een neutraal molecule losgemaakt wordt met het leveren van een bepaalde arbeid, dan is aan de opgestelde formule niets te veranderen; enkel is P' dan een som van twee termen.

[15] P. Lenard, Ann. d. Phys. **8.** p.165 en 184. Taf.I, Fig.2. 1902.

[16] P. Lenard, l.c. p.150 en p. 166-168.

van de vergelijking hierboven de volgende:

$$\Pi E + P' \leqq R\beta\nu.$$

Voor de kathodeluminescentie, die het omgekeerde proces voorstelt van het zoëven beschouwde, bekomt men door een analoge beschouwing:

$$\Pi E + P' \geqq R\beta\nu.$$

Bij de stoffen die de heer Lenard onderzocht heeft is PE steeds aanzienlijk groter dan $R\beta\nu$, omdat de spanning die de kathodestralen moeten doorlopen om net zichtbaar licht te verwekken, in enkele gevallen honderd, in andere duizenden Volt bedraagt[17]. Men moet dus aannemen dat de kinetische energie van een elektron gebruikt wordt om vele lichtenergiekwanta te verwekken.

§9. Over de ionisatie van gassen door ultraviolet licht

We zullen moeten aannemen dat bij de ionisatie van gassen door ultraviolet licht telkens een lichtenergiekwantum gebruikt wordt voor de ionisatie van een gasmolecule. Hieruit volgt vooreerst dat de ionisatiearbeid (d.w.z. de theoretisch benodigde arbeid voor de ionisatie) van een molecule niet groter kan zijn dan de energie van een geabsorbeerd werkzaam lichtenergiekwantum. Zij J de (theoretische) ionisatiearbeid per gramequivalent, dan moet dus:

$$R\beta\nu \geqq J.$$

Volgens metingen van Lenard is echter de grootste werkzame golflengte voor lucht ca. $1{,}9 \,.\, 10^{-5}$ cm, derhalve

$$R\beta\nu = 6{,}4 \,.\, 10^{12}\,\text{erg} \geqq J.$$

Een bovengrens voor de ionisatiearbeid krijgt men ook uit de ionisatiespanningen in verdunde gassen. Volgens J. Stark[18] is de kleinste, gemeten, ionisatiespanning (aan platinaelektroden) voor

[17] P. Lenard, Ann. d. Phys. **12.** p.469. 1903.

[18] J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p.57. Leipzig, 1902

lucht ca. 10 Volt[19]. Voor J geeft dit dus de bovengrens $9,6\,.\,10^{12}$ die op weinig na dezelfde is als daareven gevonden. Er is nog een ander gevolg, waarvan de toets door het experiment me van het grootste belang schijnt. Als elk geabsorbeerd lichtenergiekwantum een molecule ioniseert, dan moet tussen de geabsorbeerde hoeveelheid licht L en het aantal j door haar geïoniseerde grammoleculen, de betrekking gelden:

$$j = \frac{L}{R\beta\nu}.$$

Als onze opvatting met de werkelijkheid strookt, dan moet deze betrekking opgaan voor elk gas dat geen merkbare, niet door ionisatie vergezelde, absorptie vertoont (bij de betreffende frequentie).

Bern, 17 maart 1905.

Aangekomen op 18 maart 1905.

[19]In het inwendige van gassen is de ionisatiespanning voor negatieve ionen in elk geval vijf maal groter.

3.3

OVER DE BEWEGING VAN DEELTJES IN SUSPENSIE IN VLOEISTOFFEN IN RUST, ZOALS VEREIST DOOR DE MOLECULAIR-KINETISCHE THEORIE DER WARMTE

door A. Einstein.

Annalen der Physik, **17** pp. 549-560

In dit werk zal aangetoond worden dat, volgens de moleculaire warmtetheorie, lichamen van microscopische grootte in suspensie in vloeistoffen — ingevolge de moleculaire beweging der warmte — bewegingen van een dusdanige grootte moeten uitvoeren, dat die gemakkelijk aangewezen kunnen worden met de microscoop. Het is mogelijk dat die hier te behandelen bewegingen identiek zijn met de zgn. " Brownse moleculaire beweging"; de gegevens die me hierover ter beschikking staan, zijn echter zo onnauwkeurig dat ik me hierover geen oordeel kon vormen.
Als de hier te behandelen beweging, samen met haar te verwachten wetmatigheden, werkelijk geobserveerd kan worden dan is de thermodynamica reeds niet meer als exact te beschouwen voor ruimtes die met de microscoop te onderscheiden zijn; dan wordt ook een exacte bepaling van de ware grootte van atomen mogelijk. Omgekeerd, mocht de voorspelling van die beweging niet uitkomen, dan zou dit een zwaarwichtig argument vormen tegen de moleculair-kinetische theorie van de warmte.

§1. Over de osmotische druk toe te schrijven aan de deeltjes in suspensie

Nemen we aan dat in het deelvolume V^* van het totaalvolume vloeistof V z grammolecule van een niet-elektrolyt opgelost is. Is

het volume V^* gescheiden van het zuivere oplosmiddel door een wand die doorlaatbaar is voor het oplosmiddel maar niet voor de opgeloste substantie, dan werkt op die wand de zogenaamde osmotische druk; bij voldoende grote waarden van V^*/z voldoet die aan de vergelijking:

$$pV^* = RTz.$$

Zijn er nu, in plaats van de opgeloste stof, in het deelvolume V^* van de vloeistof, kleine gesuspendeerde lichamen aanwezig zijn die evenmin door de wand — doorlaatbaar voor het oplosmiddel — kunnen dringen, dan is het volgens de klassieke theorie van de thermodynamica niet te verwachten dat er een kracht op de wand zou werken — als we tenminste de zwaartekracht verwaarlozen, die ons hier niet interesseert; want de “vrije energie” van het systeem schijnt volgens de gewone opvatting niet af te hangen van de plaats van de wand doch enkel van de totale massa’s en hoedanigheden van de stof in suspensie, de vloeistof en de wand, en ook nog van druk en temperatuur. Alleszins zou voor de berekening van de vrije energie nog de energie en entropie van de grensvlakken in aanmerking komen (capillariteitskrachten); hier kunnen we echter van afzien door aan te nemen dat bij de plaatsveranderingen van wand en gesuspendeerde lichamen die we zullen beschouwen, er geen veranderingen in de grootte en de gesteldheid van de raakvlakken optreden.

Vanuit het standpunt van de moleculair-kinetische warmtetheorie komt men echter tot een andere opvatting. Volgens deze theorie onderscheidt zich een opgelost molecule *enkel en alleen* van een lichaam in suspensie door de grootte; men ziet niet in waarom met een aantal lichamen in suspensie niet dezelfde osmotische druk zou overeenkomen als met hetzelfde aantal opgeloste moleculen. Men zal dan moeten aannemen dat de lichamen in suspensie, vanwege de moleculaire beweging van de vloeistof, een — weliswaar zeer langzame — ongeordende beweging uitvoeren in de vloeistof; worden ze door de wand verhinderd het volume V^* te verlaten, dan gaan ze krachten uitoefenen op die wand, zoals moleculen in oplossing. Als dus n lichamen in suspensie zijn in volume V^*, zodat er $n/V^* = \nu$ zijn per eenheid van volume, en als de naburige onder hen voldoende van elkaar verwijderd zijn, dan komt daarmee een

osmotische druk overeen van de grootte:

$$p = \frac{RT}{V^*}\frac{n}{N} = \frac{RT}{N}.\nu,$$

waar N het aantal werkelijk aanwezige moleculen in een grammolecule is. In de volgende paragraaf zullen we aantonen dat de moleculair-kinetische warmtetheorie werkelijk tot deze veralgemeende opvatting van de osmotische druk leidt.

§2. De osmotische druk vanuit het standpunt van de moleculair-kinetische theorie der warmte[20]

[We noemen] $p_1, p_2 \ldots p_l$ toestandsveranderlijken van een fysisch systeem, die de ogenblikkelijke toestand volledig bepalen (bv. de coördinaten en snelheden van alle atomen in het systeem) en onderstellen dat de vergelijkingen die de veranderingen van die veranderlijken beheersen van de volgende vorm zijn:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \varphi_\nu(p_1, p_2 \ldots p_l) \quad (\nu = 1, 2 \ldots l)$$

en waarbij $\sum \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_\nu} = 0$; dan is de entropie van het systeem gegeven door de volgende uitdrukking:

$$S = \frac{\overline{E}}{T} + 2\kappa \lg \int e^{-\frac{E}{2\kappa T}} dp_1 \ldots dp_l.$$

T betekent hier de absolute temperatuur, $\overline{E}$ de energie van het systeem, E de energie als functie der p_ν. De integratie strekt zich uit over alle waarden van de p_ν, verenigbaar met de voorwaarden opgelegd aan het probleem. κ is verbonden met de hoger aangehaalde constante N door de relatie $2\kappa N = R$. Derhalve krijgen we voor de vrije energie:

$$F = -\frac{R}{N} T \lg \int e^{-\frac{EN}{RT}} dp_1 \ldots dp_l = -\frac{RT}{N} \lg B.$$

[20] In deze paragraaf worden de werken van de auteur over de grondslagen van de thermodynamica als bekend ondersteld (vgl. Ann. d. Phys. **9** p. 417, 1902; **11** p.170, 1903). De kennis van die werken of van deze paragraaf is ontbeerlijk voor het begrip van de resultaten uit het onderhavige werk.

Beelden we ons nu een vloeistof in, ingesloten in het volume V; in het deelvolume V^* bevinden zich n opgeloste moleculen, resp. lichamen in suspensie, die door een semipermeabele wand in V^* vastgehouden worden; hierdoor worden de integratiegrenzen beïnvloed in de integraal B, die optreedt in de uitdrukking voor S en F. We nemen aan dat het gezamenlijke volume van de opgeloste moleculen, resp. de lichamen in suspensie, klein is t.o.v. V^*. In de theorie waarvan sprake wordt het systeem volledig voorgesteld door de toestandsveranderlijken $p_1 \dots p_l$.
Als het moleculaire beeld in alle details zou vastliggen, dan zou de berekening van de integraal B dergelijke grote moeilijkheden bieden dat aan een exacte berekening van F nauwelijks kan gedacht worden. We moeten hier echter alleen weten hoe F afhangt van het volume V^*, het volume waarin alle opgeloste moleculen, resp. lichamen in suspensie, begrepen zijn; (in het volgende noemen we die [samen] "deeltjes").
We noemen x_1, y_1, z_1 de rechthoekige coördinaten van het zwaartepunt van het eerste deeltje, x_2, y_2, z_2 die van het tweede, enz., x_n, y_n, z_n die van het laatste; we geven voor de zwaartepunten van de deeltjes de oneindig kleine gebieden, in de vorm van parallellepipeda, $dx_1\, dy_1\, dz_1$, $dx_2\, dy_2\, dz_2 \dots dx_n\, dy_n\, dz_n$, die allen in V^*gelegen zijn. Gezocht is de waarde van de integraal in de uitdrukking voor F met de beperking dat de zwaartepunten van de deeltjes in de hen zo-even toegewezen gebiedjes liggen. In elk geval kan deze integraal in de vorm

$$dB = dx_1 dy_1 \dots dz_n . J$$

gebracht worden, waar J onafhankelijk is van $dx_1\, dy_1$ enz. evenals van V^*, d.w.z. van de plaats van de semipermeabele wand. J is echter ook onafhankelijk van de specifieke keuze van *de plaatsen* van de zwaartepuntgebiedjes en van de waarde van V^*, wat zo dadelijk aangetoond wordt. Onderstellen we een tweede systeem van oneindig kleine gebiedjes voor de zwaartepunten van de deeltjes, aangegeven door $dx'_1\, dy'_1\, dz'_1$, $dx'_2\, dy'_2\, dz'_2 \dots dx'_n\, dy'_n\, dz'_n$ die even groot zijn als de eerste en er enkel door hun plaats van verschillen en eveneens in V^* begrepen zijn, dan geldt analoog:

$$dB' = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n . J',$$

waarbij

$$dx_1 dy_1 \ldots dz_n = dx'_1 dy'_1 \ldots dz'_n.$$

Derhalve is:

$$\frac{dB}{dB'} = \frac{J}{J'}.$$

Uit de moleculaire theorie der warmte, zoals gegeven in de geciteerde werken, kan eenvoudig worden afgeleid [21] dat dB/B resp. dB'/B gelijk is aan de waarschijnlijkheid dat op een willekeurig gekozen ogenblik de zwaartepunten van de deeltjes zich in de gebieden $(dx_1 \ldots dz_n)$, resp. $(dx'_1 \ldots dz'_n)$ bevinden. Zijn nu de bewegingen van de individuele deeltjes (met een voldoende benadering) onafhankelijk van elkaar, is de vloeistof homogeen en werken er geen krachten op de deeltjes, dan moeten de waarschijnlijkheden voor de twee systemen van gebiedjes dezelfde zijn, voorzover hun grootte gelijk is; dan geldt:

$$\frac{dB}{B} = \frac{dB'}{B}$$

Uit deze vergelijking en de vorige volgt echter

$$J = J'$$

Daarmee is aangetoond dat J noch van V^* noch van x_1, $y_1 \ldots z_n$ afhankelijk is. Door integratie krijgt men

$$B = \int J dx_1 \ldots dz_n = JV^{*n}$$

en daaruit

$$F = -\frac{RT}{N}\{\lg J + n \lg V^*\}$$

en

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{RT}{V^*}\frac{n}{N} = \frac{RT}{N}\nu.$$

Door deze beschouwing werd aangetoond dat het bestaan van de osmotische druk een gevolg is van de moleculair-kinetische theorie van de warmte en dat, volgens deze theorie, opgeloste moleculen of deeltjes in suspensie in dezelfde aantallen zich, wat de osmotische druk betreft, volkomen gelijk gedragen, bij grote verdunning.

[21] A.Einstein, Ann. d. Phys. **11.** p.170. 1903.

§3. Theorie van de diffusie van kleine bolletjes in suspensie

Nemen we aan dat in een vloeistof deeltjes in suspensie willekeurig verdeeld zijn. We onderzoeken de dynamische evenwichtstoestand onder de voorwaarde dat op de deeltjes een kracht K inwerkt die afhangt van de plaats doch niet van de tijd. Eenvoudigheidshalve nemen we aan dat de kracht overal de richting van de X-as heeft. Als ν het aantal deeltjes in suspensie per eenheid van volume is, dan is, bij thermodynamisch evenwicht, ν een zodanige functie van x, dat de verandering van vrije energie verdwijnt voor een willekeurige virtuele verplaatsing δx van de substantie in suspensie. Derhalve heeft men:

$$\delta F = \delta E - T\delta S = 0.$$

Neemt men aan dat de vloeistof, loodrecht op de X-as, de doorsnede 1 bezit en begrensd wordt door de vlakken $x = 0$ en $x = l$. Dan heeft men:

$$\delta E = -\int_0^l K\nu\delta x dx$$

en

$$\delta S = \int_0^l R\frac{\nu}{N}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}dx = -\frac{R}{N}\int_0^l \frac{\partial\nu}{\partial x}\delta x dx.$$

De gezochte voorwaarde voor evenwicht is dus

$$-K\nu + \frac{RT}{N}\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

ofwel

$$K\nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

De laatste vergelijking drukt uit dat de kracht K in evenwicht gehouden wordt door de osmotische drukkrachten.
We gebruiken de vergelijking (1) om de diffusiecoëfficiënt van de substantie in suspensie te verkrijgen. We kunnen de daareven beschouwde toestand van dynamisch evenwicht opvatten als de superpositie van twee processen die in tegengestelde zin verlopen, namelijk

1. een beweging van de substantie in suspensie onder de invloed van de kracht K die op elk enkelvoudig deeltje inwerkt,

2. een diffusieproces, op te vatten als gevolg van de ongeordende bewegingen van de deeltjes vanwege de moleculaire warmtebeweging.

Zijn de deeltjes in suspensie bolvormig (bolstraal P) en bezit de vloeistof de wrijvingscoëfficiënt k, dan veroorzaakt de kracht bij een individueel deeltje de snelheid [22]:

$$\frac{K}{6\pi kP},$$

en doorheen de eenheid van doorsnede treden per tijdseenheid

$$\frac{\nu K}{6\pi kP}$$

deeltjes.
Noemt men verder D de diffusiecoëfficiënt van de stof in suspensie en μ de massa van een deeltje, dan treden per tijdseenheid, ten gevolge van de diffusie,

$$-D\frac{\partial(\mu\nu)}{\partial x}\text{gram}$$

ofwel

$$-D\frac{\partial\nu}{\partial x}$$

deeltjes door de eenheid van doorsnede. Omdat er dynamisch evenwicht heerst, moet:

$$\frac{\nu K}{6\pi kP} - D\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Uit de twee, zojuist gevonden, voorwaarden (1) en (2) voor het dynamisch evenwicht kan men de diffusiecoëfficiënt berekenen. Men krijgt:

$$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi kP}.$$

De diffusiecoëfficiënt van de stof in suspensie hangt dus alleen af, buiten universele constanten en de absolute temperatuur, van de

[22] Vgl. bv. G.Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 26e Vorlesung §4.

wrijvingscoëfficiënt van de vloeistof en van de grootte van de deeltjes in suspensie.

§4. Over de ongeordende beweging van deeltjes in suspensie in een vloeistof en haar verband met de diffusie

We gaan nu over tot een nauwkeuriger onderzoek van de ongeordende bewegingen die veroorzaakt worden door de moleculaire warmtebeweging en aanleiding geven tot de diffusie, zoals onderzocht in de laatste paragraaf.
Men moet kennelijk aannemen dat elk individueel deeltje een beweging uitvoert die onafhankelijk is van de beweging van alle andere deeltjes; ook de beweging van één en hetzelfde deeltje in onderscheiden tijdsintervallen dienen als onafhankelijke gebeurtenissen te worden opgevat, zolang we ons deze tijdsintervallen als niet te klein gekozen kunnen indenken.
Bij onze beschouwingen voeren we nu een tijdsinterval τ in dat zeer klein is t.o.v. de waarneembare tijdsintervallen, doch zo groot dat de bewegingen uitgevoerd door een deeltje in twee opeenvolgende intervallen τ als van elkaar onafhankelijke gebeurtenissen opgevat kunnen worden.
Nemen we aan dat er zich in totaal n deeltjes in suspensie in een vloeistof bevinden. In een tijdsinterval τ zullen de X-coördinaten van de individuele deeltjes zich met Δ vermeerderen, waarbij Δ voor elk deeltje een andere (positieve of negatieve) waarde heeft. Voor Δ moet een bepaalde verdelingswet gelden; het aantal deeltjes dn die in het tijdsinterval τ een verschuiving ondergaan tussen Δ en $\Delta + d\Delta$ is uit te drukken door een vergelijking van de vorm

$$dn = n\varphi(\Delta)d\Delta$$

waarbij

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)d\Delta = 1$$

en φ enkel voor heel kleine waarden van Δ verschillend is van nul en aan de voorwaarde

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$$

voldoet. We onderzoeken nu hoe de diffusiecoëfficiënt afhangt van φ, waarbij we ons beperken tot het geval dat het aantal deeltjes ν enkel afhangt van x en t.
Zij nu $\nu = f(x,t)$ het aantal deeltjes per eenheid van volume; we berekenen de verdeling op de tijd $t+\tau$ uit de verdeling op tijd t. Uit de definitie van de functie $\varphi(\Delta)$ volgt eenvoudig het aantal deeltjes dat zich op de tijd $t+\tau$ ophoudt tussen twee vlakken loodrecht op de X-as met de abscissen x en $x+dx$. Men krijgt:

$$f(x,t+\tau)dx = dx. \int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} f(x+\Delta)\varphi(\Delta)d\Delta.$$

Daar τ zeer klein, is kunnen we stellen:

$$f(x,t+\tau) = f(x,t) + \tau\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Verder ontwikkelen we $f(x+\Delta,t)$ naar machten van Δ:

$$f(x+\Delta,t) = f(x,t) + \Delta\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \ldots \text{in inf.}$$

Deze ontwikkeling kunnen we onder het integraalteken uitvoeren, want tot de integraal dragen slechts zeer kleine waarden van Δ iets bij. We krijgen:

$$f+\frac{\partial f}{\partial t}.\tau = f. \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\varphi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2}{2}\varphi(\Delta)d\Delta\ldots$$

In het rechterlid verdwijnen de tweede, vierde, enz. term vanwege $\varphi(x) = \varphi(-x)$ terwijl van de eerste, derde, vijfde, enz. term elke term zeer klein is tegenover de voorgaande. Uit deze vergelijking bekomen we, door te letten op

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)d\Delta = 1$$

en door te stellen dat

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\varphi(\Delta)d\Delta = D$$

en enkel de eerste en de derde term in het rechterlid in acht te nemen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Dit is de bekende differentiaalvergelijking voor de diffusie en men ziet in dat D de diffusiecoëfficiënt is.
Aan deze ontwikkeling kunnen we nog een belangrijke beschouwing vastknopen. We hebben aangenomen dat de individuele deeltjes alle betrokken waren op hetzelfde coördinatensysteem. Dat is echter niet nodig, omdat de bewegingen van de individuele deeltjes onafhankelijk zijn van elkaar. We willen nu de beweging van elk deeltje op een coördinatensysteem betrekken waarvan de oorsprong op $t = 0$ samenvalt met het zwaartepunt van het betreffende deeltje; met het onderscheid dat nu $f(x,t)dx$ het aantal deeltjes betekent waarvan de X-coördinaat van tijd $t = 0$ tot tijd $t = t$ *gestegen* is met een hoeveelheid die tussen x en $x + dx$ ligt.
Ook in dit geval verandert de functie f overeenkomstig vergelijking (1). Verder moet kennelijk voor $x \gtrless 0$ en $t = 0$

$$f(x,t) = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx = n$$

zijn. Het probleem, dat overeenstemt met het probleem van de diffusie vanuit één punt (met verwaarlozing van wisselwerking der diffunderende deeltjes), is nu wiskundig volkomen bepaald; zijn oplossing is:

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}.$$

De verdeling van de plaatsveranderingen in een willekeurige tijd t is dezelfde als die van toevallige fouten, wat men kon vermoeden. Betekenisvol is echter het verband van de constante in de exponent met de diffusiecoëfficiënt. Met behulp van deze vergelijking berekenen we nu de verschuiving λ_x in de richting van de X-as die een deeltje gemiddeld ondervindt; nauwkeuriger uitgedrukt: de wortel uit het rekenkundige gemiddelde der kwadraten van de verschuivingen in de richting van de X-as; dit is:

$$\lambda_x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2Dt}.$$

De gemiddelde verschuiving is dus evenredig met de vierkantswortel uit de tijd. Men kan gemakkelijk aantonen dat de wortel uit de gemiddelde waarde van de *totale verschuivingen* der deeltjes de waarde $\lambda_x\sqrt{3}$ heeft.

§5. Formule voor de gemiddelde verschuiving van deeltjes in suspensie. Een nieuwe methode om de ware grootte van de atomen te bepalen

In §3 hebben we de diffusiecoëfficiënt D gevonden van bolletjes van een stof met straal P in suspensie in een vloeistof:

$$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi kP}.$$

Verder vonden we in §4 voor de gemiddelde waarde van de verschuivingen van de deeltjes in de richting van de X-as in de tijd t:

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt}.$$

Door elimineren van D krijgen we:

$$\lambda_x = \sqrt{t}.\sqrt{\frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi kP}}.$$

Deze vergelijking laat zien hoe λ_x moet afhangen van T, k, en P. We willen uitrekenen hoe groot λ_x is voor een seconde als N overeenkomstig de resultaten van de kinetische gastheorie gelijk gesteld wordt aan $6\,.\,10^{23}$; men kieze als vloeistof water van 17^0 C ($k = 1,35\,.\,10^{-2}$) en als deeltjesdiameter 0,001 mm. Men krijgt:

$$\lambda_x = 8\,.\,10^{-5}\,\mathrm{cm} = 0,8 \text{ micron}.$$

De gemiddelde verschuiving in 1 min zou dus ca. 6 micron zijn. Omgekeerd kan de gevonden betrekking gebruikt worden ter bepaling van N. Men krijgt:

$$N = \frac{t}{\lambda_x^2}.\frac{RT}{3\pi kP}.$$

Moge het een onderzoeker weldra lukken over de vraag die hier opgeworpen werd, en die belangrijk is voor de warmtetheorie, te beslissen!

Bern, mei 1905.

(Ontvangen op 11 mei 1905)

3.4

Over de elektrodynamica van lichamen in beweging

door A. Einstein.

Annalen der Physik, **17** pp. 891-921

Het is bekend dat de elektrodynamica van Maxwell — zoals die heden ten dage opgevat wordt — bij haar toepassing op lichamen in beweging tot asymmetrieën leidt die de fenomenen zelf blijkbaar niet vertonen. Men denke bijvoorbeeld aan elektrodynamische wisselwerking tussen een magneet en een geleider. Het waarneembare fenomeen hangt hier enkel af van de relatieve beweging van geleider en magneet, wijl volgens de gewone opvatting die twee gevallen, dat het één of het andere lichaam in beweging is, streng van elkaar gescheiden moeten worden. Beweegt zich namelijk de magneet en is de geleider in rust, dan ontstaat in de omgeving van de magneet een elektrisch veld, met een zekere waarde van de energie, hetgeen een stroom opwekt op die plaatsen waar zich delen van de geleider bevinden . Is de magneet echter in rust en beweegt de geleider, dan ontstaat in de omgeving van de magneet geen elektrisch veld; in de geleider daarentegen ontstaan elektromotorische krachten, die op zichzelf geen energie voorstellen, maar — als men de gelijkheid van de relatieve beweging onderstelt, in de twee beschouwde gevallen — aanleiding geeft tot elektrische stromen van dezelfde grootte en hetzelfde verloop als diegene veroorzaakt door de elektrische krachten in het eerste geval.
Gelijksoortige voorbeelden, evenals de mislukte experimenten die de beweging van de aarde ten opzichte van het “lichtmedium” moesten aantonen, leiden tot het vermoeden dat met het begrip van de absolute rust niet alleen in de mechanica maar ook in de elektrodynamica geen eigenschappen van de verschijnselen zelf overeenkomen; veel meer is het zo dat voor alle coördinatensystemen waarvoor de vergelijkingen van de mechanica geldig zijn, ook dezelfde elektrodynamische en optische wetten gelden, zoals reeds

bewezen is voor de grootheden van de eerste orde. En we willen dit vermoeden (waarvan de inhoud in het vervolg principe van de relativiteit genoemd zal worden) tot onderstelling verheffen en bovendien de onderstelling maken, die slechts schijnbaar tegenstrijdig is met de vorige, dat het licht in de lege ruimte zich steeds met een bepaalde snelheid V voortplant, onafhankelijk van de bewegingstoestand van het uitzendende lichaam. Deze twee onderstellingen zijn voldoende om tot een eenvoudige elektrodynamica van bewegende lichamen te komen die zonder tegenstrijdigheid is, en wel op basis van de theorie van Maxwell voor lichamen in rust. Het invoeren van een "lichtether" zal overbodig blijken, in zoverre dat in de te ontwikkelen opvatting noch een ruimte in absolute rust, voorzien van speciale eigenschappen, ingevoerd wordt noch aan een punt van de lege ruimte waar elektromagnetische processen gebeuren, een snelheidsvector toegevoegd wordt.
De te ontwikkelen theorie is gesteund — zoals elke andere elektrodynamica — op de kinematica van het starre lichaam, want de uitspraken van elke theorie betreffen verbanden tussen starre lichamen (coördinatensystemen), klokken en de elektromagnetische processen. Dat deze omstandigheden niet voldoende in acht genomen werden, is de wortel van de moeilijkheden waarmee de elektrodynamica van lichamen in beweging heden te kampen heeft.

1. Kinematisch Deel

§ 1. Definitie van gelijktijdigheid.

Gegeven zij een coördinatensysteem waarin de mechanische vergelijkingen van Newton geldig zijn. We noemen dit coördinatensysteem, om het terminologisch te onderscheiden van later in te voeren coördinatensystemen en om onze voorstelling te preciseren, het "systeem in rust".
Als een materieel punt in rust is ten opzichte van een coördinatensysteem, dan kan zijn positie ten opzichte van dit laatste met starre meetlatten bepaald worden met behulp van de methoden van de Euclidische meetkunde en kan ze in Cartesische coördinaten uitgedrukt worden. Als we de *beweging* van een materieel punt willen

beschrijven dan geven we de waarde van zijn coördinaten als functie van de tijd. Men moet nu echter goed voor ogen houden dat een dergelijke wiskundige beschrijving enkel dan natuurkundig zin heeft als het vooraf duidelijk is wat hier onder “ tijd” verstaan wordt. We moeten er rekening mee houden dat al onze uitspraken waarin de tijd een rol speelt, altijd uitspraken over gelijktijdige gebeurtenissen zijn. Als ik bijvoorbeeld zeg “die trein komt hier om 7 uur aan”, dan betekent dit zoiets als “de kleine wijzer van mijn uurwerk wijst op 7 en het aankomen van de trein zijn gelijktijdige gebeurtenissen”[23].

Het zou er de schijn van kunnen hebben dat alle moeilijkheden omtrent de definitie van tijd overwonnen worden, indien ik in de plaats van “tijd” zou zeggen “positie van de kleine wijzer van mijn klok”. Een dergelijke definitie is inderdaad voldoende wanneer het erom gaat een tijd te definiëren uitsluitend voor de plaats waar de klok zich bevindt; de definitie voldoet echter niet meer zodra het erom gaat reeksen gebeurtenissen op onderscheiden plaatsen met elkaar in de tijd te verbinden of — wat op hetzelfde neerkomt — gebeurtenissen die voorvallen op plaatsen die verwijderd zijn van de klok een tijdswaarde toe te kennen.

We zouden er genoegen mee kunnen nemen gebeurtenissen in de tijd te duiden door middel van een waarnemer die samen met de klok in de oorsprong van de coördinaten zit, en telkens de positie van de wijzer optekent als hij een lichtsignaal ontvangt dat door de lege ruimte tot hem komt en getuigt van een gebeurtenis die in de tijd gedetermineerd moet worden. Een dergelijke toewijzing brengt echter de misstand mee dat ze niet onafhankelijk is van het standpunt van de waarnemer met de klok, zoals we weten uit ervaring. We kunnen [het verband] op een veel meer praktische manier vastleggen door de volgende beschouwing.

Bevindt zich in punt A van de ruimte een klok, dan kan een waarnemer die zich in A bevindt, gebeurtenissen in de onmiddellijke omgeving van A in de tijd duiden door na te gaan welke posities van de wijzer samenvallen met deze gebeurtenissen. Als er zich nu ook in het punt B van de ruimte een klok bevindt — en we willen

[23]We gaan het hier niet hebben over de onnauwkeurigheid die schuilt in het begrip gelijktijdigheid voor gebeurtenissen op bij benadering dezelfde plaats; die moet ook door een abstractie overbrugd worden.

eraan toevoegen: "een klok met exact dezelfde gesteldheid als van de klok in A" — dan kan een waarnemer die zich in B bevindt ook de gebeurtenissen in de onmiddellijke omgeving van B duiden in de tijd. Het is echter niet mogelijk, zonder een verdere bepaling, een gebeurtenis in A, wat de tijd betreft, te vergelijken met een gebeurtenis in B. Tot nu toe hebben we alleen een "A-tijd" en een "B-tijd" gedefinieerd, maar geen tijd die voor A en B gemeenschappelijk is. Die laatste tijd kan nu gedefinieerd worden, doordat men *bij definitie* vastlegt dat de "tijd" die nodig is voor het licht om van A tot B te geraken, gelijk is aan de "tijd" om van B naar A te geraken. Onderstellen we dat een lichtstraal uit A weggaat naar B op de "A-tijd" t_A, en op de "B-tijd" t_B in B teruggekaatst wordt naar A, waarna ze terug aankomt in A op de "A-tijd" t'_A. De beide klokken lopen bij definitie synchroon als

$$t_B - t_A = t'_A - t_{B.}$$

We nemen aan dat deze definitie van synchronisme mogelijk is zonder tegenstrijdigheid, en wel voor willekeurig vele punten, dat dus in het algemeen de volgende voorwaarden gelden:

1. Als de klok in B synchroon loopt met de klok in A, dan loopt de klok in A synchroon met de klok in B.

2. Als de klok in A synchroon loopt zowel met de klok in B als met die in C, dan lopen ook de klokken in B en C synchroon ten opzichte van elkaar.

We hebben zo met behulp van zekere (gedachte) fysische ervaringen vastgelegd wat verstaan moet worden onder het synchroon lopen van klokken in rust op verschillende plaatsen, en zijn daarmee klaarblijkelijk tot een definitie gekomen van "gelijktijdig" en "tijd". De "tijd" van een gebeurtenis is wat aangegeven is door een klok in rust op de plaats van de gebeurtenis en dat synchroon loopt met één welbepaalde klok in rust en wel voor alle tijdsbepalingen met diezelfde klok.
Op grond van de ervaring leggen we nog vast dat de grootheid

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

een universele constante is (de lichtsnelheid in de lege ruimte). Het is essentieel dat we de tijd gedefinieerd hebben met behulp van klokken in rust in het systeem dat in rust is; de daarnet gedefinieerde tijd noemen we, daarom "de tijd van het systeem in rust".

§2. Over de relativiteit van lengten en tijden.

De volgende beschouwingen zijn gesteund op het relativiteitsprincipe en op het principe van het constant zijn der lichtsnelheid, twee principes die we als volgt definiëren:

1. Twee coördinatensystemen bevinden zich ten opzichte van elkaar in een gelijkvormige translatiebeweging: de wetten volgens dewelke de toestanden van een fysisch systeem veranderen, zijn dan onafhankelijk daarvan, of deze veranderingen betrokken worden op het ene of het andere coördinatensysteem.

2. Elke lichtstraal beweegt zich in het "rustende" coördinatensysteem met de snelheid V, onafhankelijk daarvan of deze lichtstraal door een lichaam in rust of in beweging uitgezonden wordt. Hierbij is

$$\text{snelheid} = \frac{\text{lichtweg}}{\text{tijdsduur}}$$

   waarbij "tijdsduur" opgevat moet worden in de zin van §1.

Een starre staaf in rust weze gegeven; die heeft, gemeten met een meetlat die ook in rust is, de lengte l. We denken ons de staaf in met haar as op de X-as van het rustende coördinatensysteem gelegd en denken dan een gelijkvormige parallelle translatiebeweging in, langs de X-as, in de zin van stijgende x (met snelheid v). We vragen nu naar de lengte van de *bewegende* staaf, waarvan we ons inbeelden dat ze door de volgende twee bewerkingen vastgesteld wordt:

a) De waarnemer beweegt zich, samen met de hoger genoemde meetlat, mee met de te meten staaf en meet direct, door de lat naast de staaf te leggen, de lengte van de staaf op dezelfde manier alsof staaf, waarnemer en meetlat in rust zouden zijn.

b) De waarnemer [beschikt over] klokken die in het rustende systeem opgesteld zijn en er — in rust — synchroon lopen volgens §1; hij stelt vast in welke punten van het rustende systeem zich begin en einde van de te meten staaf bevinden op een bepaalde tijd t. De afstand tussen deze beide punten, gemeten met de reeds gebruikte meetlat die nu in rust is, is ook een lengte die men eveneens als "lengte van de staaf" kan aanduiden.

Volgens het relativiteitsprincipe moet de lengte bepaald in a), die we aangeven met "lengte van de staaf in het bewegende systeem" gelijk zijn aan de lengte l van de staaf in rust.

De lengte die we zullen vinden bij de operatie b) en die we "lengte van de (bewegende) staaf in het rustende systeem" zullen noemen, gaan we nu bepalen op grond van onze twee principes en we zullen vinden dat ze verschillend is van l.

De algemeen gebruikte kinematica neemt stilzwijgend aan dat de lengtes bepaald door de beide vermelde bewerkingen exact aan elkaar gelijk zijn, of, met andere woorden, dat een star lichaam in beweging in het tijdperk t, wat de meetkundige verbanden betreft, volledig vervangbaar is door *hetzelfde* lichaam als dit in een bepaalde positie *in rust is.*

Verder denken we ons klokken in aan de beide uiteinden (A en B) van de staaf aangebracht, die synchroon zijn met de klokken van het systeem in rust, d.w.z. wier aanduidingen telkens overeenkomen met de "tijd van het systeem in rust" op de plaatsen waar ze zich juist bevinden; deze klokken zijn derhalve "synchroon in het systeem in rust".

We denken ons verder in dat er bij elke klok een waarnemer is die mee beweegt [met de klok] en dat deze waarnemers het criterium voor het synchroon lopen op beide klokken toepassen, zoals opgesteld in §1. Op de tijd t_A [24] vertrekt een lichtstraal uit A, die wordt op t_B in B teruggekaatst en komt op de tijd t'_A in A terug aan. Met inachtneming van het principe van het constant zijn van

[24] "Tijd" betekent hier "tijd van het systeem in rust" en tevens " plaats van de wijzer in de bewegende klok, dat zich op de plaats bevindt waarvan sprake".

de lichtsnelheid vinden we

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

en

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}$$

waarbij r_{AB} de lengte betekent van de staaf in beweging (gemeten in het systeem in rust).
Waarnemers dus die bewegen met de bewegende staaf zouden de twee klokken als niet synchroon lopend ervaren, terwijl een waarnemer in het rustende systeem de klokken voor synchroon lopend zou verklaren.
We zien dus dat we aan het begrip der gelijktijdigheid geen *absolute* betekenis kunnen toeschrijven maar dat integendeel twee gebeurtenissen die vanuit het ene coördinatensysteem als gelijktijdig beschouwd worden, vanuit een ander in beweging t.o.v. het eerste niet meer als gelijktijdig opgevat moeten worden.

§3. Theorie van de coördinaten en tijdstransformaties van het systeem in rust naar een systeem, ten opzichte van het vorige, in gelijkvormige translatiebeweging

In de ruimte "in rust", onderstellen we, zijn twee coördinatensystemen gegeven, d.w.z. twee systemen van telkens drie onderling loodrechte starre materiële lijnen die van één punt uitgaan. De X-assen van de beide systemen kiezen we samenvallend, de Y- en Z- assen parallel. Aan elk systeem, onderstellen we, zijn een starre meetlat en een aantal klokken toegevoegd, en we onderstellen dat de beide meetlatten en alle klokken van beide systemen exact aan elkaar gelijk zijn.
Er wordt nu aan het beginpunt van één der beide systemen (k) een (constante) snelheid gegeven in de richting van de stijgende x van het andere systeem dat in rust is (K), [snelheid], onderstellen we, die tegelijk geldt voor de coördinaatassen, de betreffende meetlat en de klokken. Met elke tijd t van het systeem in rust K komt dan een plaats overeen van de assen van het systeem in beweging en op grond van symmetrie zijn we gemachtigd aan te nemen dat de beweging van k van die aard is dat de assen van het bewegende

systeem op de tijd t (met "t"wordt immer een tijd van het systeem in rust aangegeven) parallel zijn aan de assen van het systeem in rust.

We denken ons nu de ruimte in, opgemeten zowel vanuit het systeem in rust K met behulp van de meetlat in rust, als vanuit het bewegende systeem k met de meebewegende meetlat, en zo worden de coördinaten x, y, z resp. ξ, η, ζ vastgesteld. Verder wordt de tijd t in het systeem in rust vastgelegd voor alle punten van dit laatste waar zich klokken bevinden, op de manier aangegeven in §1; evenzo wordt de de tijd τ bepaald voor alle punten in het bewegende systeem waar zich klokken bevinden die relatief tot dit laatste in rust zijn, met toepassing van de methode uit §1 van lichtsignalen tussen de punten waar zich die laatste klokken bevinden.

Bij elk waardensysteem x, y, z, t dat plaats en tijd van een gebeurtenis in het systeem in rust volkomen weergeeft, hoort ook een waardensysteem ξ, η, ζ, τ dat dezelfde gebeurtenis vastlegt t.o.v. het systeem k, en nu is de opgave het systeem van vergelijkingen te vinden dat deze grootheden verbindt.

Om te beginnen is het duidelijk dat deze vergelijkingen *lineair* moeten zijn vanwege de eigenschappen van homogeniteit die we aan ruimte en tijd toekennen.

Stellen we $x' = x - vt$, dan is het duidelijk dat met een punt in rust in systeem k een bepaald, van de tijd onafhankelijk, waardesysteem x', y, z overeen komt. We bepalen om te beginnen τ als functie van x', y, z en t. Met dit doel moeten we met vergelijkingen uitdrukken dat τ niets anders is dan het geheel van de aanduidingen van de klokken die in k in rust zijn, die volgens de regel van §1 synchroon gemaakt werden.

Vanuit het beginpunt van systeem k wordt een lichtstraal gestuurd op tijd τ_0 langs de X-as, naar x' en van daaruit weerkaatst op tijd τ_1 naar de oorsprong, waar ze aankomt op tijd τ_2; dan moet:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1;$$

als men de argumenten van de functie τ er bij schrijft en het principe van de constante lichtsnelheid in het systeem in rust toepast [wordt dit]:

$$\frac{1}{2}[\tau(0,0,0,t)+\tau(0,0,0,(t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}))] = \tau(x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}).$$

Hieruit volgt, als men x' oneindig klein kiest:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v})\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

ofwel

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0.$$

We merken op dat, in de plaats van de coördinatenoorsprong, elk ander punt als uitgangspunt van de lichtstraal hadden kunnen kiezen, zodat de vergelijking die daarnet verkregen werd voor alle waarden van x', y, z, geldig is.
Houdt men er rekening mee dat het licht langs de H-[25] en de Z-as, beschouwd vanuit het systeem in rust, zich met de snelheid $\sqrt{V^2-v^2}$ voortplant, dan levert een analoge overweging:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=0$$

Uit deze vergelijkingen volgt, daar τ een *lineaire* functie is:

$$\tau=a(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'),$$

waarbij a een voorlopig onbekende functie $\phi(v)$ is en waarin men voor bondigheid aangenomen heeft dat in de oorsprong van k voor $\tau=0$ [ook] $t=0$ is.
Met behulp van dat resultaat is het gemakkelijk de grootheden ξ, η, ζ te verkrijgen; men drukt door vergelijkingen uit dat het licht, gemeten in het bewegende systeem, zich ook [aldaar] met de snelheid V voortplant (zoals vereist wordt door het principe van de constante lichtsnelheid in verbinding met het relativiteitsprincipe).
Voor een lichtstraal die op de tijd $\tau=0$ in de richting van stijgende ξ uitgestuurd wordt, geldt:

$$\xi=V\tau$$

ofwel

$$\xi=aV(t-\frac{v}{V^2-v^2}x').$$

[25] *Bedoeld is natuurlijk de eta-as, H is de hoofdletter η .[Nota van vertaler]*

Nu echter beweegt de lichtstraal zich ten opzichte van het beginpunt van k en gemeten in het rustende systeem, met de snelheid $V - v$, zodat geldt:

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Brengen we deze waarde van t in de vergelijking voor ξ, dan krijgen we:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x'.$$

Op een analoge manier krijgen we, door de voortplanting van lichtstralen te beschouwen langs de twee andere assen:

$$\eta = V\tau = aV(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'),$$

waarbij

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \qquad x' = 0;$$

zodat

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y$$

en

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Vervangen we x' door haar waarde, dan krijgen we:

$$\tau = \phi(v)\beta(t - \frac{v}{V^2}x),$$

$$\xi = \phi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \phi(v)y,$$

$$\zeta = \phi(v)z,$$

waarbij

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}$$

en ϕ een voorlopig onbekende functie van v is. Wordt niets verondersteld over de beginpositie van het bewegende systeem, noch over het nulpunt van τ, dan moet men in het rechterlid van deze vergelijkingen telkens een additieve constante bijvoegen.

Nu moeten we bewijzen dat elke lichtstraal, gemeten in het bewegende systeem, zich met de snelheid V voortplant, ingeval, zoals we aangenomen hebben, dit ook zo is in het systeem in rust; want we hebben nog niet het bewijs geleverd dat het principe van de constante lichtsnelheid verenigbaar is met het relativiteitsprincipe.
Nemen we aan dat op het ogenblik $t = \tau = 0$, als de coördinatenoorsprongen van beide systemen samenvallen, uit deze oorsprong een bolvormige golf uitgezonden wordt, die zich in systeem K met snelheid V uitbreidt. Is (x, y, z) een punt dat juist door deze golf bereikt wordt, dan is dus

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Deze vergelijking transformeren we met behulp van onze transformatievergelijkingen en we krijgen, na een eenvoudige berekening:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Die golf is dus ook in het bewegende systeem een bolgolf die zich uitbreidt met de snelheid V. Hiermee is aangetoond dat onze twee basisprincipes met elkaar verenigbaar zijn.
In de transformatievergelijkingen die we opgesteld hebben, komt nog een onbekende functie $\phi(v)$ voor: die willen we nu bepalen.
Daartoe voeren we een derde coördinatensysteem K' in, dat relatief tot systeem k in translatie is, parallel met de Ξ-as, en zo dat zijn oorsprong voortbeweegt langs die Ξ-as met de snelheid $-v$. Onderstellen we verder dat op de tijd $t = 0$ de drie coördinaatoorsprongen samenvallen en onderstellen we voor $t = x = y = z = 0$ de tijd t' van systeem K' ook nul. We noemen x', y', z' de coördinaten, gemeten in systeem K'; door onze transformaties twee maal toe te passen, krijgen we:

$$\begin{aligned}
t' = \phi(-v)\beta(-v)\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\} &= \phi(v)\phi(-v)t, \\
x' = \phi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &= \phi(v)\phi(-v)x, \\
y' = \phi(-v)\eta &= \phi(v)\phi(-v)y, \\
z' = \phi(-v)\zeta &= \phi(v)\phi(-v)z.
\end{aligned}$$

Daar de betrekkingen tussen x', y', z' en x, y, z de tijd t niet bevatten, zijn de systemen K en K' in rust ten opzichte van elkaar en

is het duidelijk dat de transformatie van K naar K' de identieke transformatie moet zijn. Derhalve is:

$$\phi(v)\phi(-v) = 1.$$

We vragen nu naar de betekenis van $\phi(v)$. We kijken speciaal naar het stuk van de H-as van systeem k dat gelegen is tussen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ en $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Dit stuk van de H-as is een staaf die zich beweegt, ten opzichte van K, met snelheid v loodrecht op haar as en waarvan de uiteinden in K de volgende coördinaten bezitten:

$$x_1 = vt, \qquad y_1 = \frac{l}{\phi(v)}, \qquad z_1 = 0$$

en

$$x_2 = vt, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0.$$

De lengte van de staaf, gemeten in K, is dus $l/\phi(v)$; hiermee is de betekenis van de functie ϕ gegeven. Om redenen van symmetrie is het nu zonneklaar dat de lengte van een staaf die loodrecht op haar as beweegt, gemeten in het systeem in rust, enkel van de snelheid kan afhangen en niet van de richting of de zin van de beweging. Derhalve verandert de lengte, gemeten in het systeem in rust, van de staaf niet als v omgewisseld wordt met $-v$. Hieruit volgt

$$\frac{l}{\phi(v)} = \frac{l}{\phi(-v)},$$

of

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

Uit deze en de voorheen gevonden relatie volgt dat $\phi(v) = 1$ moet zijn, zodat de transformatieformules overgaan in

$$\begin{aligned}
\tau &= \beta(t - \frac{v}{V^2}x),\\
\xi &= \beta(x - vt),\\
\eta &= y,\\
\zeta &= z,
\end{aligned}$$

waarbij

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}.$$

§4. De fysische betekenis van de verkregen vergelijkingen aangaande starre lichamen in beweging en klokken in beweging

Beschouwen we een starre bol [26] met straal R, in rust ten opzichte van het bewegende systeem k en met middelpunt in de coördinatenoorsprong van k. Deze bol beweegt zich met snelheid v ten opzichte van systeem K en de vergelijking van zijn oppervlak is:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

De vergelijking van dit oppervlak, uitgedrukt in x, y, z en op ogenblik $t = 0$ is:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2})^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Een star lichaam dus, dat opgemeten in een toestand van rust de vorm van een bol heeft, bezit in een toestand van beweging — en bekeken vanuit het systeem in rust — de vorm van een omwentelingsellipsoide met de assen

$$R\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2},\ R,\ R.$$

Terwijl dus de Y- en de Z-dimensie van de bol (en dus van elk willekeurig star lichaam) door de beweging ongewijzigd blijven, vertoont de X-dimensie zich als ingekort in de verhouding $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$, des te sterker naarmate v groter is. Voor $v = V$ krimpen alle voorwerpen in beweging — vanuit het systeem in rust beschouwd — samen tot vlakke structuren[27]. Voor snelheden groter dan de lichtsnelheid worden onze redeneringen zinloos; we zullen in onze volgende beschouwingen trouwens vinden dat de lichtsnelheid in onze theorie, vanuit fysisch standpunt, de rol speelt van de oneindig grote snelheden.

Het is duidelijk dat dezelfde resultaten gelden voor voorwerpen in rust t.o.v. het "systeem in rust", wanneer die beschouwd worden vanuit een systeem in gelijkvormige beweging.

[26] Dit betekent een lichaam dat, onderzocht in rust, de bolvorm bezit.

[27] *Duits:* flächenhafte Gebilde *[noot van de vertaler]*

We denken ons verder een der klokken in die, als ze in rust zijn t.o.v. het het systeem in rust, in staat zijn daar de tijd t aan te geven doch, rustend in het bewegende systeem, aldaar de tijd τ kunnen aangeven; onderstellen we dat deze klok geplaatst is in de coördinatenoorsprong van k en zo geregeld dat ze [aldaar] de tijd τ aangeeft. Hoe snel gaat deze klok, beschouwd vanuit het systeem in rust?
Tussen de grootheden x, t, en τ, die betrekking hebben op de plaats van deze klok, gelden klaarblijkelijk de vergelijkingen:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}}(t - \frac{v}{V^2}x)$$

en

$$x = vt.$$

Dus is

$$\tau = t\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2} = t - (1 - \sqrt{1-(\frac{v}{V})^2})t,$$

waaruit volgt dat de aanwijzing van de klok, (beschouwd vanuit het systeem in rust) per seconde $(1-\sqrt{1-(v/V)^2}$ sec. achterloopt, of — op grootheden van de vierde of hogere orde — $\frac{1}{2}(v/V)^2$ sec.
Hieruit ontstaat de volgende merkwaardige[28] consequentie. Bevinden zich in de punten A en B van K klokken in rust die, gezien vanuit het systeem in rust, synchroon lopen en beweegt men de klok in A met de snelheid v langs de verbindingslijn naar B; is dan de klok uit A aangekomen in B, dan lopen beide klokken niet meer synchroon. De klok die van A naar B bewoog loopt achter op degene die sinds het begin in B vertoefde en wel met $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ sec. (op grootheden van de vierde of hogere orde na), waar t de tijd is benodigd voor [de verplaatsing van] de klok van A naar B.
Men ziet direct dat dit resultaat ook nog geldig is als de klok zich langs een willekeurige polygonale weg van A naar B beweegt, in het bijzonder ook als de punten A en B samenvallen.
Neemt men aan dat dit resultaat, bewezen voor een polygonale lijn, ook geldt voor een continu gekromde curve, dan krijgt men de stelling: bevinden zich in A twee synchroon lopende klokken en beweegt men één van deze op een gesloten curve met constante

[28] *Duits:* eigentümlich *[noot van vertaler]*

snelheid tot ze in A terugkomt, en dit duurt t sec, dan loopt deze laatste klok, bij aankomst in A, achter op de onbeweeglijk gebleven met $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ sec.
Men besluit hieruit dat een balansuurwerk dat zich op de aardequator bevindt een heel klein beetje trager loopt dan een uurwerk, van identieke opbouw en aan anderszins identieke omstandigheden onderworpen, dat zich op een aardpool bevindt.

§5. Additietheorema voor de snelheden

Het systeem k beweegt zich langs de X-as van systeem K met de snelheid v en in k beweegt zich een punt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \xi &= w_\xi \tau \\ \eta &= w_\eta \tau \\ \zeta &= 0 \end{aligned}$$

waarbij w_ξ en w_η constanten voorstellen.
Er wordt gezocht naar de beweging van het punt relatief tot het systeem K. Voert men in de bewegingsvergelijkingen van het punt, met behulp van de transformatieformules ontwikkeld in §3, de grootheden x, y, z, t in, dan krijgt men:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t, \\ y &= \frac{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

De wet van het parallellogram der snelheden is dus volgens onze theorie slechts geldig in eerste benadering. We stellen:

$$\begin{aligned} U^2 &= (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2, \\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2 \end{aligned}$$

en[29]

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{w_y}{w_x};$$

[29] *allicht is* $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{w_\eta}{w_\xi}$ *bedoeld.[noot van vertaler]*

α moet men beschouwen als de hoek tussen de snelheden v en w. Na een eenvoudige berekening volgt dat:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - (\frac{vw\sin\alpha}{V})^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

Het verdient onze aandacht dat v en w op een symmetrische manier optreden in de uitdrukking voor de resulterende snelheid. Heeft ook w de richting van de X-as (Ξ-as), dan krijgen we:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Uit deze vergelijking volgt dat uit het samenstellen van twee snelheden die kleiner zijn dan V, steeds een snelheid volgt die kleiner is dan V. Stelt men namelijk $v = V - \kappa$, $w = V - \lambda$, waarbij κ en λ positief zijn en kleiner dan V, dan is:

$$U = V\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Verder volgt dat de lichtsnelheid V door samenstelling met een "onderlichtsnelheid" niet veranderd kan worden. Voor dit geval krijgt men:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Ingeval v en w dezelfde richting hebben, hadden we de formule voor U ook kunnen bereiken door het samenstellen van twee transformaties volgens §3. Voeren we naast de systemen K en k nog een derde systeem in, k', in parallelbeweging aan k en waarvan het beginpunt zich verplaatst op de Ξ-as met de snelheid w; dan krijgen we tussen de grootheden x, y, z, t en de overeenkomende grootheden in k' vergelijkingen die alleen verschillen van deze uit §3 doordat in de plaats van "v" de grootheid

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}$$

optreedt; men ziet hieruit dat dergelijke paralleltransformaties — zoals het hoort — een groep vormen.

We hebben de nodige stellingen afgeleid over de kinematica die overeenstemt met onze twee principes en gaan nu tonen hoe ze toegepast worden in de elektrodynamica.

2. Elektrodynamisch Deel

§6. Transformatie van de vergelijkingen van Maxwell-Hertz voor de lege ruimte. Over de aard van de elektromotorische krachten die optreden bij beweging in een magneetveld

[We onderstellen dat] de vergelijkingen van Maxwell-Hertz voor de lege ruimte geldig zijn voor het systeem K, zodat geldt:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

waar (X, Y, Z) de vector van de elektrische kracht betekent, (L, M, N) die van de magnetische kracht.

Als we op deze vergelijkingen de transformaties toepassen die ontwikkeld werden in §3, waarbij we de elektromagnetische verschijnselen betrekken op het systeem dat met snelheid v voortbeweegt,

zoals aldaar ingevoerd, dan krijgen we de vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta(N - \frac{v}{V}Y)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta(M + \frac{v}{V}Z)}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta(Y - \frac{v}{V}N)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta(N - \frac{v}{V}Y)}{\partial \xi},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta(Z + \frac{v}{V}M)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta(M + \frac{v}{V}Z)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta(Y - \frac{v}{V}N)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta(Z + \frac{v}{V}M)}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta(M + \frac{v}{V}Z)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta(Z + \frac{v}{V}M)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta(N - \frac{v}{V}Y)}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta(Y - \frac{v}{V}N)}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

waarbij

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}.$$

Het relativiteitsprincipe eist nu dat als de vergelijkingen van Maxwell-Hertz voor de lege ruimte geldig zijn in systeem K, ze dit ook zijn in systeem k; dit betekent dat voor de vectoren der elektrische en magnetische kracht ((X', Y', Z') en (L', M', N')), gedefinieerd door hun ponderomotorische werking op elektrische resp. magnetische massa's in het bewegende systeem k, de vergelijkingen gelden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Klaarblijkelijk moeten nu de twee gevonden systemen van vergelijkingen voor het systeem k juist hetzelfde uitdrukken, daar ze beide equivalent zijn met de vergelijkingen van Maxwell-Hertz voor het systeem K. De vergelijkingen van beide systemen stemmen overeen, op de symbolen na die de vectoren voorstellen; dus volgt

dat de functies die optreden in beide systemen op overeenkomstige plaatsen moeten overeenkomen op een factor na; die [factor is] gemeenschappelijk voor de functies van het ene systeem, onafhankelijk van ξ, η, ζ en τ, doch eventueel afhankelijk van v [en we noemen hem] $\psi(v)$. Dan gelden de volgende betrekkingen:

$$X' = \psi(v)X, \qquad L' = \psi(v)L$$

$$Y' = \psi(v)\beta(Y - \frac{v}{V}N), \quad M' = \psi(v)\beta(M + \frac{v}{V}Z),$$

$$Z' = \psi(v)\beta(Z + \frac{v}{V}M), \quad N' = \psi(v)\beta(N - \frac{v}{V}Y).$$

Construeert men nu het omgekeerde van dit systeem van vergelijkingen, een eerste maal door het oplossen van de zojuist verkregen vergelijkingen, een tweede maal door de vergelijkingen toe te passen op de omgekeerde transformatie (van k naar K), die gekenmerkt wordt door de snelheid $-v$; die twee aldus verkregen vergelijkingssystemen moeten identiek zijn en er volgt[30]:

$$\varphi(v).\varphi(-v) = 1$$

Verder volgt, op grond van symmetrie [31]

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

en dus is

$$\varphi(v) = 1$$

en onze vergelijkingen nemen de volgende vorm aan:

$$X' = X, \qquad L' = L$$

$$Y' = \beta(Y - \frac{v}{V}N), \quad M' = \beta(M + \frac{v}{V}Z),$$

$$Z' = \beta(Z + \frac{v}{V}M), \quad N' = \beta(N - \frac{v}{V}Y).$$

[30] *Bedoeld is $\psi(v).\psi(-v) = 1$ en lees ook verder ψ voor φ. [noot van vertaler]*

[31] Is b.v. $X = Y = Z = L = M = 0$ en $N \neq 0$, zo is duidelijk vanwege de symmetrie dat als het teken van v omkeert, zonder verandering van zijn numerieke waarde, dan ook Y' zijn teken moet omkeren zonder zijn numerieke waarde te veranderen.

Over de interpretatie van deze vergelijkingen merken we het volgende op. We onderstellen een puntvormige hoeveelheid elektriciteit die, gemeten in het systeem in rust K van de grootte "één" is, d.w.z. die, in rust in het systeem in rust op een zelfde hoeveelheid elektriciteit op 1cm afstand een kracht van 1Dyn uitoefent. Volgens het relativiteitsprincipe is deze elektrische massa, als ze gemeten wordt in het bewegende systeem, ook van de grootte "één". Is deze hoeveelheid elektriciteit in rust t.o.v. het systeem in rust dan is per definitie de vector (X, Y, Z) gelijk aan de kracht die er op inwerkt. Is de hoeveelheid elektriciteit in rust t.o.v. het systeem in beweging (tenminste op het betreffende ogenblik) dan is de kracht die er op inwerkt gemeten in het bewegende systeem gelijk aan de vector $(X', Y' Z')$. De eerste drie van de bovenstaande vergelijkingen kunnen we derhalve op de volgende twee manieren in woorden vatten:

1. Is een puntvormige elektrische eenheidspool in beweging in een elektromagnetisch veld, dan werkt op hem, buiten de elektrische kracht, een "elektromotorische kracht"die gelijk is — als we termen die vermenigvuldigd worden met tweede of hogere machten van v/V verwaarlozen — met het vectorproduct van de bewegingssnelheid van de eenheidspool en de magnetische kracht, gedeeld door de lichtsnelheid. (Oude manier van uitdrukken.)

2. Wordt een puntvormige elektrische eenheidslading bewogen in een elektromagnetisch veld, dan wordt er een kracht op uitgeoefend; deze is gelijk aan de elektrische kracht verkregen door transformatie van het veld naar een coördinatensysteem in rust t.o.v. de lading, en genomen op de plaats van de eenheidslading. (Nieuwe manier van uitdrukken.)

Iets analoogs geldt voor de "magnetomotorische krachten". Men ziet dat in de [hier] ontwikkelde theorie de elektromotorische kracht enkel de rol speelt van een hulpbegrip, dat zijn invoering te danken heeft aan de omstandigheid dat elektrische en magnetische krachten geen existentie bezitten onafhankelijk van de bewegingstoestand van het coördinatensysteem.

Verder is het duidelijk dat de asymmetrie, aangehaald in de inleiding, in onze beschouwing van de stroom opgewekt door de relatie-

ve beweging van een magneet en een geleider zal verdwijnen. Ook vragen naar de “zetel” van de elektrodynamische elektromotorische krachten (unipolaire machines) verliezen hun betekenis.

§7. Theorie van het principe van Doppler en van de aberratie

[Onderstellen we] dat ver weg van de oorsprong, in het systeem K, er een bron is van elektromagnetische straling; in een deel van de ruimte dat de coördinatenoorsprong bevat wordt deze straling met voldoende benadering voorgesteld door de vergelijkingen:

$$X = X_0 \sin\Phi, \quad L = L_0 \sin\Phi,$$

$$Y = Y_0 \sin\Phi, \quad M = M_0 \sin\Phi, \quad \Phi = \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right),$$

$$Z = Z_0 \sin\Phi, \quad N = N_0 \sin\Phi,$$

Hier zijn (X_0, Y_0, Z_0) en (L_0, M_0, N_0) de vectoren die de amplitude van de golftrein bepalen, a, b, c de richtingscosinussen van de golfnormaal.
We vragen naar de gesteldheid van deze golven als ze onderzocht worden door een waarnemer die in rust is t.o.v. het bewegende systeem k. — We passen de transformatievergelijkingen toe voor de elektrische en magnetische krachten, gevonden in §6 en deze voor de coördinaten en de tijd, gevonden in §3 en we krijgen onmiddellijk:

$$X' = X_0 \sin\Phi', \qquad L' = L_0 \sin\Phi'$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V}N_0\right)\sin\Phi', \quad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V}Z_0\right)\sin\Phi',$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V}M_0\right)\sin\Phi', \quad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V}Y_0\right)\sin\Phi',$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

waarbij gesteld werd:

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta(1 - a\frac{v}{V})},$$

$$c' = \frac{c}{\beta(1 - a\frac{v}{V})}.$$

Uit de vergelijking voor ω' volgt: onderstel dat een waarnemer in beweging is met de snelheid v t.o.v. een oneindig verwijderde lichtbron met frequentie ν en verder dat φ de hoek is die de snelheid v maakt met de verbindingslijn "lichtbron-waarnemer" in een systeem in rust t.o.v. de lichtbron, dan neemt de waarnemer een lichtfrequentie ν' waar, gegeven door de vergelijking:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}.$$

Dit is het principe van Doppler voor willekeurige snelheden. Voor $\varphi = 0$ neemt de vergelijking de [volgende] overzichtelijke vorm aan:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Men ziet dat — in tegenstelling met de gebruikelijke opvatting — voor $v = -\infty$, $\nu = \infty$ is.

Noemt men φ' de hoek tussen de golfnormaal (straalrichting) in het bewegende systeem en de verbindingslijn "lichtbron-waarnemer", dan neemt de vergelijking voor a' de vorm aan:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\phi}$$

Deze vergelijking is de uitdrukking van de aberratiewet in haar algemeenste vorm. Is $\phi = \frac{\pi}{2}$, dan neemt deze vergelijking de eenvoudige vorm aan:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

We moeten nu nog de amplitude van de golven zoeken, zoals ze zich voordoet in het systeem in beweging. Noemt men A en A' de amplitude van de elektrische of magnetische kracht, gemeten in

het systeem in rust, resp. in het systeem in beweging, dan krijgt men:

$$A'^2 = A^2 \frac{(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi)^2}{1 - (\frac{v}{V})^2}$$

en voor $\varphi = 0$ gaat deze vergelijking over in de eenvoudigere:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Uit de opgestelde vergelijkingen volgt dat voor een waarnemer die een lichtbron zou naderen met de snelheid V, die lichtbron hem oneindig intens zou moeten voorkomen.

§8. Transformatie van de energie van lichtstralen. Theorie van de stralingsdruk uitgeoefend op volmaakte spiegels

Vermits $A^2/8\pi$ gelijk is aan de lichtenergie per eenheid van volume, zo moeten we, volgens het relativiteitsprincipe, $A'^2/8\pi$ beschouwen als de lichtenergie in het systeem in beweging. A'^2/A^2 zou dan de verhouding zijn tussen de energie van een bepaald lichtcomplex, "gemeten in beweging" en "gemeten in rust", op voorwaarde dat het volume van het lichtcomplex gemeten in K hetzelfde was als gemeten in k. Dit echter is niet het geval. Als a, b, c de richtingscosinussen zijn van de golfnormaal van het licht in het systeem in rust,[en we beschouwen] het boloppervlak dat zich met lichtsnelheid uitbreidt:

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2$$

dan trekt geen energie door de oppervlaktelementen van die bol; we kunnen derhalve zeggen dat die bol voortdurend hetzelfde lichtcomplex omsluit. We vragen nu naar de hoeveelheid energie die dit oppervlak omsluit gezien vanuit systeem k, m.a.w. naar de energie van het lichtcomplex relatief tot het systeem k.

Het boloppervlak is — gezien vanuit het bewegende systeem — een ellipsoïde, met als vergelijking op tijdstip $\tau = 0$:

$$(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi)^2 + (\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi)^2 + (\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi)^2 = R^2.$$

Noemt men S het volume van de bol, S' datgene van deze ellipsoïde, dan is, zoals een eenvoudige berekening aantoont:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Noemt men nu E de lichtenergie, gemeten in het systeem in rust, E' deze in het systeem in beweging, en omsloten door het beschouwde oppervlak, dan krijgt men:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}},$$

en deze formule gaat voor $\varphi = 0$ over in de eenvoudigere:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}}}.$$

Het is opmerkelijk dat de energie en de frequentie van een lichtcomplex volgens dezelfde wet veranderen als functies van de bewegingstoestand van de waarnemer.
Onderstel nu als coördinatenvlak $\xi = 0$ een volkomen spiegelend oppervlak dat de vlakke golven, vermeld in vorige paragraaf, weerkaatst. We vragen nu naar de lichtdruk uitgeoefend op het spiegelende vlak en naar de richting, frequentie, en intensiteit van het licht na weerkaatsing.
Het invallende licht zij gegeven door de grootheden A, $\cos\varphi$, ν (op het systeem K betrokken). Van uit k beschouwd, zijn de overeenkomende grootheden:

$$A' = A\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi-\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{v}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}}.$$

Voor het weerkaatste licht krijgen we, indien we het betrekken op het systeem k:

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Uiteindelijk krijgt men voor het gereflecteerde licht, door terug te transformeren naar het systeem K:

$$A''' = A''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}} = A\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+(\frac{v}{V})^2}{1-(\frac{v}{V})^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi''+\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{v}\cos\varphi''} = -\frac{(1+(\frac{v}{V})^2)\cos\varphi-2\frac{v}{V}}{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+(\frac{v}{V})^2},$$

$$\nu''' = \nu''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}} = \nu\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+(\frac{v}{V})^2}{1-(\frac{v}{V})^2}.$$

Op een oppervlakte-eenheid van de spiegel valt per eenheid van tijd (gemeten in het systeem in rust) een [hoeveelheid] energie $A^2/8\pi(V\cos\varphi - v)$. De energie die zich, per eenheid van tijd, verwijdert van de oppervlakte-eenheid is $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi'''+v)$. Het verschil van beide uitdrukkingen stelt, volgens het energieprincipe, de arbeid per tijdseenheid voor, geleverd door de lichtdruk. Stelt men deze voor door het product $P.v$, waarbij P de lichtdruk is, dan krijgt men:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{(\cos\varphi-\frac{v}{V})^2}{1-(\frac{v}{V})^2}.$$

In eerste benadering krijgt men

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi$$

in overeenkomst met de ervaring en met andere theorieën.
Alle problemen van optica van lichamen in beweging kunnen met de hier gebruikte methode opgelost worden. Het komt hierop neer dat de elektrische en de magnetische kracht van het licht, dat door een bewegend lichaam beïnvloed wordt, getransformeerd worden naar een coördinatensysteem dat in rust is, relatief tot dit lichaam. Hierdoor wordt elk probleem van optica van bewegende lichamen herleid tot een reeks problemen van optica voor lichamen in rust.

§9. Transformatie van de vergelijkingen van Maxwell-Hertz met inachtneming van de convectiestromen

We vertrekken van de vergelijkingen:

$$\frac{1}{V}\{u_x\varrho + \frac{\partial X}{\partial t}\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\{u_y\varrho + \frac{\partial Y}{\partial t}\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\{u_z\varrho + \frac{\partial Z}{\partial t}\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

waarbij

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

de 4π-voudige dichtheid van de elektriciteit is en (u_x, u_y, u_z) de snelheidsvector van de elektriciteit.

Als men zich inbeeldt dat de elektrische massa's onveranderlijk gebonden zijn aan kleine starre lichamen (ionen, elektronen), dan zijn deze vergelijkingen de elektromagnetische grondslag voor de elektrodynamica en optica van bewegende lichamen volgens Lorentz.

Nemen we aan dat deze vergelijkingen gelden in systeem K, en transformeren we ze naar systeem k met behulp van de transformatievergelijkingen uit §3 en §6, dan krijgen we:

$$\frac{1}{V}\{u_\xi\varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\{u_\eta\varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\{u_\zeta\varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

waarbij

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta(1 - \frac{u_x v}{V^2})} = u_\eta,$$

$$\frac{u_z}{\beta(1 - \frac{u_x v}{V^2})} = u_\zeta,$$

$$\varrho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta(1 - \frac{v u_x}{V^2})\varrho.$$

Omdat — zoals volgt uit het additietheorema voor snelheden (§5) — de vector (u_ξ, u_η, u_ζ) niets anders is dan de snelheid van de elektrische massa's in het systeem k, is hiermee aangetoond, vertrekkend van onze kinematische principes, dat de elektrodynamica van lichamen in beweging volgens Lorentz overeenkomt met het relativiteitsprincipe.

Het zij hier nog kort opgemerkt dat uit de opgestelde vergelijkingen de volgende belangrijke stelling afgeleid kan worden: beweegt een elektrisch geladen lichaam willekeurig in de ruimte en verandert zijn lading hierbij niet, bekeken vanuit een coördinatensysteem meebewegend met het lichaam, dan blijft zijn lading ook constant gezien vanuit het systeem in rust.

§10. Dynamica van het (langzaam versnelde) elektron

In een elektromagnetisch veld beweegt zich, nemen we aan, een puntvormig deeltje voorzien van de elektrische lading ϵ (in het vervolg "elektron"genoemd) en we onderstellen het volgende over zijn bewegingswet:

Is het elektron in rust in een bepaald tijdperk, dan gebeurt zijn beweging in het eerstvolgend tijdsdeeltje volgens de vergelijkingen:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \epsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \epsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \epsilon Z,$$

voorzover het deeltje langzaam in beweging is, waarbij x, y, z de coördinaten van het elektron zijn, en μ zijn massa voorstelt.

Zonder aan de algemeenheid van de redenering afbreuk te doen, mogen en zullen we aannemen dat het elektron op het moment dat we het beschouwen zich in de oorsprong bevindt en zich langs de

X-as van het systeem K beweegt met de snelheid v. Het is dan duidelijk dat het elektron in het genoemde moment ($t = 0$) in rust is ten opzichte van een coördinatensysteem k dat parallel beweegt aan de X-as met de constante snelheid v.

Uit die onderstelling van daarnet, in verbinding met het relativiteitsprincipe, is het duidelijk dat in de onmiddellijk volgende tijd (voor kleine waarden van t) het elektron, gezien vanuit systeem k, zich beweegt volgens de vergelijkingen

$$\mu\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \epsilon X',$$

$$\mu\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \epsilon Y',$$

$$\mu\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \epsilon Z',$$

waarbij de tekens ξ, η, ζ, X', Y', Z' betrekking hebben op systeem k. Leggen we nog vast dat voor $t = x = y = z = 0 \quad \tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ moet zijn, dan gelden de transformatievergelijkingen uit §§3 en 6, zodat geldt:

$$\tau = \beta(t - \frac{v}{V^2}x),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z$$

$$X' = X,$$

$$Y' = \beta(Y - \frac{v}{V}N),$$

$$Z' = \beta(Z + \frac{v}{V}M).$$

Met behulp van deze vergelijkingen transformeren we de hoger gevonden bewegingsvergelijkingen van het systeem k naar het systeem K en krijgen we:

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d^2x}{dt^2} & = & \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^2}X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} & = & \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}(Y - \frac{v}{V}N), \\ \frac{d^2z}{dt^2} & = & \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}(Z + \frac{v}{V}M). \end{array} \right.$$

Volgens de gebruikelijke manier van beschouwen, vragen we nu naar de "longitudinale" en de "transversale" massa van het elektron in beweging. We schrijven de vergelijkingen in de vorm:

$$\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = \epsilon X = \epsilon X',$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \epsilon\beta(Y - \frac{v}{V}N) = \epsilon Y',$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \epsilon\beta(Z + \frac{v}{V}M) = \epsilon Z'$$

en bemerken vooreerst dat $\epsilon X'$, $\epsilon Y'$, $\epsilon Z'$ de componenten zijn van de ponderomotorische kracht die op het elektron inwerkt en wel gezien van uit een systeem dat op dat ogenblik met het elektron, met dezelfde snelheid, meebeweegt (deze kracht zou bv. gemeten kunnen worden met een veerbalans in rust in dit laatste systeem). Als we nu deze kracht ronduit "de kracht die op het elektron werkt" noemen en de vergelijking

$$\text{massagetal} \times \text{versnellingsgetal} = \text{krachtgetal}$$

handhaven en verder bepalen dat de versnellingen in het systeem in rust K dienen gemeten te worden, dan krijgen we uit de vergelijkingen hierboven:

$$\text{Longitudinale massa} = \frac{\mu}{(\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2})^3},$$

$$\text{Transversale massa} = \frac{\mu}{1 - (\frac{v}{V})^2}.$$

Natuurlijk zou men bij een andere definitie van kracht en versnelling andere getallen krijgen voor de massa's; men ziet hieruit dat bij het vergelijken van verschillende theoriën voor de elektronbeweging, men zeer behoedzaam te werk moet gaan.
We merken op dat deze resultaten betreffende de massa ook gelden voor de ponderabele materiële punten; want door het toevoegen van een *willekeurig kleine* elektrische lading aan een ponderabel materiëel punt kan dit tot een elektron (in onze betekenis) gemaakt worden.

We bepalen de kinetische energie van het elektron. Beweegt zich een elektron vanuit de oorsprong van het systeem K volgens de X-as, met beginsnelheid nul en onder de invloed van een elektrostatische kracht K, dan is duidelijk dat aan het elektrostatische veld een energie ter grootte van $\int \epsilon X dx$ onttrokken wordt. Daar, bij onderstelling, het elektron langzaam versneld wordt en dientengevolge geen energie door straling afgeeft, dient men de energie onttrokken aan het elektrostatische veld gelijk te stellen aan de bewegingsenergie W van het elektron. Indien men erop let dat gedurende het gehele beoogde bewegingsgebeuren de eerste der vergelijkingen (A) geldig is, dan krijgt men:

$$W = \int \epsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \{ \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}} - 1 \}.$$

W wordt dus voor $v = V$ oneindig groot. Snelheden boven de lichtsnelheid hebben dus geen bestaansmogelijkheid — zoals bij onze vroegere resultaten.
Ook deze uitdrukking voor de kinetische energie moet voor ponderabele massa's gelden, ingevolge het argument boven aangehaald.
Nu gaan we de eigenschappen van het elektron opsommen, toegankelijk voor het experiment, zoals die volgen uit het systeem der vergelijkingen (A).

1. Uit de tweede vergelijking in (A) volgt dat een elektrische kracht Y en een magnetische kracht N precies dan even sterk afbuigend werken op een elektron met snelheid v, als $Y = N.v/V$. Men ziet dus dat, in onze theorie, het mogelijk is de snelheid van het elektron te bepalen uit de verhouding van magnetische afbuigbaarheid A_m en elektrische afbuigbaarheid A_e, en dit voor elke snelheid, door toepassing van de wet:
$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$
Deze betrekking is toegankelijk voor verificatie door een experiment daar de snelheid van het elektron ook direct gemeten kan worden, bv. door snel oscillerende elektrische en magnetische velden.

2. Uit de afleiding van de kinetische energie van het elektron volgt dat de volgende betrekking moet gelden tussen het doorlopen potentiaalverschil en de snelheid van het elektron:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\epsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}} - 1 \right\}.$$

3. We berekenen de kromtestraal R van de baan bij aanwezigheid van een magnetische kracht N die loodrecht op de snelheid van het elektron inwerkt (en die de enige afbuigende kracht is). Uit de tweede der vergelijkingen (A) krijgen we:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{v}{V} N. \sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}$$

ofwel

$$R = V^2 \frac{\mu}{\epsilon} . \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}} . \frac{1}{N}.$$

In de theorie die voor ons ligt, drukken deze drie betrekkingen volledig de wetten uit waaronder het elektron moet bewegen.

Tot slot maak ik de opmerking dat, bij het werken aan de hier behandelde problemen, mijn vriend en collega M.Besso mij trouw ter zijde stond en dat ik hem menige waardevolle aansporing te danken heb.

Bern, juni 1905.

(Aangekomen 30 juni 1905)

3.5

Is de traagheid van een lichaam afhankelijk van zijn energie-inhoud?

door A. Einstein.

Annalen der Physik, **18** pp. 639-641

De resultaten van een onlangs door mij in deze Annalen gepubliceerd onderzoek over elektrodynamica[32] leiden tot een zeer interessante gevolgtrekking, die we hier zullen afleiden.

Als grondslag nam ik toen de vergelijkingen van Maxwell-Hertz voor de lege ruimte evenals de Maxwelliaanse uitdrukking voor de elektromagnetische energie van de ruimte en bovendien het volgende principe:

De wetten waaronder de toestanden van een fysisch systeem veranderen, zijn onafhankelijk van op welk van twee coördinatensystemen die veranderingen betrokken worden, als die twee systemen relatief tot elkaar zich in een gelijkvormige parallel-translatiebeweging bevinden (relativiteitsprincipe).

Op deze grondlagen steunend[33], leidde ik onder andere het volgende resultaat af (l.c. §8):

Een systeem van vlakke lichtgolven, betrokken op het coördinatensysteem (x, y, z), bezit, nemen we aan, de energie l; de straalrichting (golfnormaal) vormt de hoek φ met de x-as van het systeem. Voert men een nieuw coördinatensysteem (ξ, η, ζ) in, in gelijkvormige en parallele translatie t.o.v. (x, y, z) en waarvan de oorsprong zich met een snelheid v langs de x-as beweegt, dan bezit de genoemde hoeveelheid licht — gemeten in het systeem (ξ, η, ζ) — de energie:

[32] A.Einstein, Ann. d. Phys.**17.** p.891. 1905.

[33] Het aldaar gebruikte principe van het constant-zijn van de lichtsnelheid is natuurlijk bevat in de vergelijkingen van Maxwell.

$$l^* = l\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}},$$

waar V de lichtsnelheid betekent. Van dit resultaat zullen we in hetgeen volgt gebruik maken.
Nemen we aan dat zich in het systeem (x, y, z) een lichaam in rust bevindt, waarvan de energie — betrokken op het systeem (x, y, z) — E_0 is. Relatief tot het systeem (ξ, η, ζ), dat zoals hierboven met snelheid v t.o.v. het eerste beweegt, weze de energie van dit lichaam H_0.
Dit lichaam, onderstellen we weer, zendt vlakke lichtgolven uit in een richting die de hoek φ vormt met de x-as en met een energie $L/2$ (gemeten relatief tot (x, y, z)) en gelijktijdig zendt het een even grote hoeveelheid licht uit in de tegengestelde richting. Hierbij blijft het lichaam in rust t.o.v. het systeem (x, y, z). Voor dit gebeuren moet het energieprincipe gelden en wel (volgens het relativiteitsprincipe) met betrekking tot beide coördinatensystemen. Noemen we E_1 resp. H_1 de energie van het lichaam na de lichtuitstraling, gemeten met betrekking tot het systeem (x, y, z) resp. (ξ, η, ζ), zo krijgen we, met gebruik van de hoger aangegeven relatie:

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right], \\
H_0 &= H_1 + \left[\frac{L}{2}\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}} + \frac{L}{2}\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}}\right] \\
&= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}}.
\end{aligned}$$

Door aftrekking bekomt men uit deze vergelijkingen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}} - 1\right\}.$$

De twee verschillen van de vorm $H-E$ die optreden in deze uitdrukking hebben eenvoudige fysische betekenissen. H en E zijn energiewaarden van hetzelfde lichaam, betrokken op twee coördinatensystemen die relatief t.o.v. elkaar bewegen, en waarbij het lichaam in

het ene systeem (systeem $(x,\ y,\ z)$) in rust is. Het is dus duidelijk dat het verschil $H - E$ zich enkel onderscheiden kan van de kinetische energie K betrokken op het andere systeem (systeem $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$) door een additieve constante C die enkel afhangt van de keuze van de additieve constanten in de energieën H en E. Derhalve kunnen we stellen:

$$\begin{aligned} H_0 - E_0 &= K_0 + C, \\ H_1 - E_1 &= K_1 + C, \end{aligned}$$

omdat C niet verandert gedurende de uitstraling van het licht. Aldus krijgen we:

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}} - 1\right\}.$$

De kinetische energie van het lichaam, met betrekking tot $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ neemt af ten gevolge van de lichuitstraling, en wel met een hoeveelheid die niet afhankelijk is van de hoedanigheden van het lichaam. Het verschil $K_0 - K_1$ hangt bovendien af van de snelheid, precies zoals de kinetische energie van het elektron (l.c. §10). Als we grootheden van vierde orde en hoger verwaarlozen kunnen we stellen:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2}\frac{v^2}{2}.$$

Uit deze vergelijking volgt onmiddellijk:
Geeft een lichaam de energie L af in de vorm van straling, dan verkleint zijn massa met L/V^2. Hierbij is het klaarblijkelijk onbelangrijk dat de energie die onttrokken wordt aan het lichaam precies in stralingsenergie overgaat, en dat voert ons tot de meer algemene gevolgtrekking:
De massa van een lichaam is een maat voor zijn energie-inhoud; verandert de energie met L, dan verandert ook de massa in dezelfde zin met $L/9.10^{20}$, als de energie in erg en de massa in gram gemeten worden.
Het is niet uitgesloten dat bij lichamen waarvan de energie-inhoud in hoge mate veranderlijk is (b.v. bij de radiumzouten) een test van de theorie zal lukken.
Als de theorie met de feiten overeenstemt, dan draagt de straling traagheid over van de emitterende naar de absorberende lichamen.

Bern, september 1905

(Aangekomen 27 september 1905)

Hoofdstuk 4

100 jaar moderne fysica

Epiloog: Ontwikkelingen en nieuwe uitdagingen

Het is ongepast en zelfs onmogelijk om over het verleden te schrijven zonder het heden te vermelden. In de bladzijden hiervoor, heb ik reeds hier en daar allusie gemaakt op verdere ontwikkelingen en moderne gezichtspunten. In wat volgt en als epiloog, ga ik de directe en meest in het oog springende ontwikkelingen bespreken die op natuurlijke wijze volgen op de publicaties van 1905. Daardoor verbreedt enigszins het perspectief en worden thema's uit de moderne fysica ingeleid.

4.1 Statistische mechanica

Maxwell, Boltzmann, Gibbs en Einstein zijn de spreekwoordelijke vaders van de statistische mechanica. Maxwell en Boltzmann zijn dat vooral omwille van de doorbraak in de kinetische gastheorie en wegens de definitieve intocht van statistische analyses en verklaringen in de fysica. Gibbs en Einstein zijn dat vooral omwille van een systematisering en veralgemening naar de eigenlijke statistische mechanica.

Beweging en warmte werden rigoureus en observeerbaar met elkaar verbonden. Het artikel over de Brownse beweging en de daaropvolgende theoretische ontwikkelingen door Einstein, door Marian

von Smoluchowski en door Paul Langevin in verband met diffusieprocessen hebben de dynamische fluctuatietheorie een stevig fundament gegeven. Dynamische fluctuatietheorie verwoordt hoe beweging (ook) ontstaat als gevolg van fluctuaties. De theorie van de Brownse beweging helpt ook de meest koppige wetenschappers te overtuigen van de realiteit van de moleculaire of atomaire aard van de materie. Jean Perrin maakte een kwantitatieve experimentele studie van de afhankelijkheid in de Brownse beweging van temperatuur en deeltjesgrootte en bevestigde in detail de formuleringen van Einstein. Dat was, zoals Einstein had voorspeld, een directe verificatie van de kinetisch-moleculaire theorie. Andere evidentie was te vinden in de experimentele studie van gasontladingen en de ontdekking van het elektron met bijhorende atoommodellen.

De isolatie en het tellen van gasionen aan de ene kant... en aan de ander kant de overeenkomst van de Brownse beweging met de vereisten van de kinetische hypothese... rechtvaardigen de meest voorzichtige wetenschapper nu te spreken over het experimenteel bewijs van de atoomtheorie van de materie. De atoomhypothese is dus verheven tot de positie van een wetenschappelijk goed-gefundeerde theorie. (Ostwald, jarenlange wetenschappelijke tegenstrever van Boltzmann, in 1913)

Nog na 1905 heeft Einstein verder geworsteld met de theorie van Boltzmann en die weten toe te passen. De successen die hij daarmee bereikte, bijvoorbeeld in de verklaring waarom de lucht blauw is, zijn belangrijk geweest voor het doorsijpelen van de theorie van Boltzmann. Lars Onsager, Nobelprijs scheikunde[1] 1968, zal in 1931 bij het formuleren van een statistiek voor irreversibele fenomenen geregeld verwijzen naar Einstein. Het werk van Onsager is heel erg in de stijl van het artikel van Einstein over Brownse beweging en

[1]Het gebeurt vaker dat de Nobelprijs scheikunde wordt toegekend aan fysici of aan domeinen op het grensvlak tussen fysica en scheikunde. Andere ook minder recente voorbeelden zijn Walther Nernst in 1920 voor chemische thermodynamica, Peter Debye in 1936 en Gerhard Herzberg in 1971 voor studies van de moleculaire structuur en Ilya Prigogine in 1977 voor irreversibele thermodynamica. Recenter is er onder andere Walter Kohn and John Pople in 1998 voor de ontwikkeling van mathematische en computationatele methodes in kwantumscheikunde en Kurt Wüthrich in 2002 en Richard Ernst in 1991 voor de ontwikkeling van nucleaire magnetische resonantie.

is een vervolg op zijn dynamische fluctuatietheorie.

De theorie van faseovergangen is één van de belangrijkste thema's in de evenwichts statistische mechanica van de 20ste eeuw. Het centrale onderwerp is het microscopisch begrijpen van de locatie en de overgangen tussen verschillende macroscopische regimes. Een zelfde substantie, beschreven met één bepaalde microscopische interactie kan toch een heel verschillend gedrag vertonen afhankelijk van parameters als temperatuur, dichtheid of druk. Dat zijn de verschillende fases of in een meer beperkte zin, de verschillende aggregatietoestanden van de materie. Bekende voorbeelden zijn ijs en water en hoe bij het koken water verandert in damp.

De transities of faseovergangen gebeuren scherp, voor zeer specifieke waardes van de parameters, en bij zulke overgangen kunnen allerlei merkwaardige en interessante fenomenen optreden. Er kunnen voor bepaalde overgangen zogenaamde kritische verschijnselen optreden. Voorbeelden zijn universaliteit en schalingsgedrag. Universaliteit verwijst naar het inzicht dat de microscopische details dikwijls niet zo belangrijk zijn in het typische coöperatief gedrag van een stof. De essentie is veeleer vervat in de dimensies van vrijheidsgraden en in de symmetrie van de interactie en de architectuur van de materie. Dat maakt ook dat modelleren een stuk aantrekkelijker wordt: je kan met eenvoudige en misschien onrealistische modellen beginnen en toch hopen dat voor bepaalde interessante aspecten kwalitatieve overeenkomst mogelijk is met specifieke natuurverschijnselen. Bovendien leidt universaliteit tot een classificatie en systematisering van statistisch mechanisch gedrag. Schalingsgedrag verwijst naar het wegvallen van intrinsieke ruimte- of tijdschalen. Of je van dichtbij of van veraf naar het systeem kijkt, met inzoomen of uitzoomen, de onderlinge correlaties tussen de componenten in de stof lijken daarvoor invariant. Tenslotte dient het fenomeen van spontane symmetriebreking vermeld te worden. Het speelt een rol in verschillende domeinen van de moderne fysica. Binnen de statistische mechanica is het opnieuw een typisch collectief fenomeen: ook al heeft de microscopische interactie een symmetrie, het macroscopisch uitzicht hoeft die symmetrie niet te bewaren. Een zeer kleine storing kan de symmetrie breken. Ma-

terialen kunnen zich bijvoorbeeld de invloed van een magnetisch veld “herinneren” ook al is dat reeds afgezet. Dat is bijvoorbeeld bruikbaar om geluid op te nemen.

Kritisch gedrag was al in de 19de eeuw goed bekend. Eén van de meest verdienstelijke pioniers is hier Johannes Diderik Van der Waals die reeds in zijn doctoraat *Over de Continuïteit van den Gas - en Vloeistoftoestand* van 1873 een toestandsvergelijking had geschreven waarin zowel de gas- als de vloeistoftoestand vanuit dezelfde microscopische consideraties voortvloeien[2]. In 1880 formuleerde hij ook de wet van de corresponderende toestanden waarin een eerste teken van universaliteit de kop op stak: de toestandsvergelijking kan in een universele vorm geschreven worden, onafhankelijk van de specifieke substantie.

Een andere grootmeester van kritische verschijnselen was Lev Landau die in 1937 het concept van ordeparameter invoerde. Die meet de aanwezigheid van een macroscopische orde, ondanks microscopische symmetrieën. De moderne theorie van faseovergangen is vooral gesitueerd in de tweede helft van de 20ste eeuw.

Einstein is in zijn verdere werken nog intens bezig geweest met de statistische mechanica. Daarbij heeft hij dat domein geopend voor de relativiteitstheorie en voor de kwantumtheorie. Voor de relativiteitstheorie was dat vooral in problemen uit de kosmologie. Voor de kwantumtheorie was dat vooral in de fysica bij lage temperaturen. Voor kwantum statistische mechanica heeft Einstein de fundamenten gelegd voor de beschrijving van nog een nieuwe soort toestand van de materie. Ik heb het dan vooral over de theorie van de Bose-Einstein statistiek en over de theorie van Bose-Einstein condensatie.

[2]Maxwell was zo onder de indruk dat hij dacht aan het leren van de Nederlandse taal om het werk van van der Waals beter te begrijpen. Van der Waals kreeg de Nobelprijs in 1910.

4.1.1

Bose-Einstein condensatie

Elektrische lampen zenden licht uit in alle richtingen en met alle kleuren. Rond 1917 toonde Einstein hoe atomen onder bepaalde voorwaarden door licht kunnen worden gestimuleerd om zelf licht uit te zenden. Dat uitgezonden licht heeft bovendien een golflengte (kleur) en richting die eenduidig past bij het licht dat de emissie veroorzaakt. Licht versterken door licht werd in het Engels 'Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation'; dat is een laser. Ongeveer 50 jaar geleden werden de eerste lasers gebouwd en tegenwoordig vind je ze overal.

De vraag kan gesteld of ook lasers kunnen gemaakt worden van materie. Met andere woorden, of atomen samen in een zelfde toestand kunnen gebracht worden, waarbij ze één coherent pakket vormen.

In de beginjaren van 1920 is de Indische fysicus Satyendra Nath Bose de ideeën van Einstein aan het bestuderen in verband met lichtkwanta. Bose veronderstelde bepaalde regels om fotonen te tellen of te onderscheiden. Deze regels maken een statistiek, de zogenaamde Bose-Einstein statistiek. In 1924 contacteert hij Einstein in verband met zijn werk over fotonen; hij had het graag gepubliceerd. Einstein helpt maar voegt ook iets toe. Hij veralgemeent de theorie tot bepaalde soorten deeltjes, zogenaamde bosonen. Hij voorspelt dat wanneer een gas van zulke deeltjes heel koud wordt, de deeltjes zouden verzamelen in de laagst mogelijke energietoestand. Men spreekt hier over een kwantumtoestand die doet denken aan condensatie van vloeistofdruppels uit een gas. In die toestand zijn alle atomen absoluut identiek; ze overlappen in die mate dat ze één superatoom vormen.

In 1995 werd het experimenteel geobserveerd. Deze extreme toestand van de materie wordt Bose-Einstein condensatie genoemd. Cornell en Wieman produceerden een puur condensaat van ongeveer 2000 rubidium-atomen bij een temperatuur van 0.00000002 graden boven het absolute minimum. Ketterle deed iets gelijkaardig met natrium-atomen. Er werd getoond dat het condensaat

uit geheel gecoördineerde atomen bestaat, zeer gelijkaardig aan de lichtpakketjes in de laser. Dat was het onderwerp voor de Nobelprijs fysica van 2001.

4.1.2

Turbulentie

In het algemeen kan men in principe onderscheid maken tussen twee soorten structuren of processen. Er zijn die van het evenwicht, bijvoorbeeld in kristalvorming of in de verdamping van water, en er zijn structuren en processen buiten evenwicht. Bij het laatste kunnen we ons een pot water voorstellen die onderaan verwarmd en bovenaan gekoeld wordt. Als het temperatuursverschil groter wordt, ontstaan convectiestromen. Deze stroming bestaat uit watermoleculen die in grote cylindervormige patronen de warmte van onder naar boven transporteren. Deze patronen zijn robuust en doen ook terecht denken aan stromingen in de atmosfeer zoals bijvoorbeeld beschreven in de weerkunde. Als het verschil in temperatuur onder en boven nog groter wordt, ontstaan nog ingewikkelder structuren en stroompatronen. We komen in het regime van turbulentie waar zelfs zeer kleine obstakels of storingen kunnen opgeblazen worden tot manifest verschillende stroomprofielen. Gelijkaardige turbulente stromen kunnen ook op andere manieren verkregen worden, bijvoorbeeld door grote drukverschillen of door externe drijfkrachten. Zulke macroscopisch chaotische systemen lijken zeer complex en door hun natuur word je misschien verleid te denken dat er "per definitie" geen wetmatigheid achter te zoeken valt. Opnieuw echter tonen experimenten met bijvoorbeeld erg verschillende soorten vloeistoffen universeel gedrag en zijn bepaalde eigenschappen wel degelijk reproduceerbaar.

Systemen buiten evenwicht moeten "gedreven" worden, willen ze bestaan in een stationair regime. De omgeving moet voorzien in een interactie met het medium waardoor allerhande stromen van deeltjes of energie onderhouden worden. Verschillende reservoirs in de omgeving leggen tegenstrijdige beperkingen op aan het medium. Het systeem wordt in hoge mate daardoor verontrust en een rijk maar ingewikkeld tijdsafhankelijk gedrag kan volgen. Voorbeelden

zijn niet alleen in de fysica te vinden. Scheikundige reacties en biologische processen lopen vaak ver van evenwicht. Het leven zelf lijkt pas interessant te worden onder enige frustratie. Dat alles is het onderwerp van de niet-evenwichts statistische mechanica maar de theorie is nog beperkt en in volle ontwikkeling.

Er bestaat geen formalisme dat vergelijkbaar is met dat van Gibbs voor de beschrijving van systemen buiten evenwicht. De fenomenologie wordt ook zoveel rijker. Voorlopig is het werken aan een doorbraak die de veelheid van niet-evenwichtsfenomenen kan reduceren tot basisprincipes. De fluctuatietheorie bij evenwicht is in belangrijke mate geformuleerd door Einstein. Fluctuatietheorie buiten evenwicht is niet begrepen. De spanning tussen statistische en dynamische beschrijvingen blijft daarin voortleven en wacht op nieuwe fundamentele ideeën. Het laatste grote onopgeloste probleem van de klassieke fysica, samengevat als het probleem van de turbulentie, is daarin de belangrijkste uitdaging.

4.1.3

Statistiek en dynamica

In het artikel over de Brownse beweging neemt Einstein een stochastisch model om de willekeurige verplaatsingen van de deeltjes te beschrijven. Dat model is zeer gelijkaardig aan het eenvoudiger beeld van de stochastische wandelaar uit 2.4.3. Men kan zich afvragen in hoeverre dat model microscopisch is. De botsingen tussen de deeltjes en de vloeistofmoleculen worden zeker niet in detail uitgeschreven. De microscopische dynamica blijft eigenlijk onzichtbaar en de interacties met de moleculen worden *effectief* gemodelleerd.

De redenen voor “ruis” of “kansaspecten” in een dynamische beschrijving kunnen divers zijn. Waarschijnlijkheid komt de fysica binnen onder vele gedaantes maar één van de belangrijkste is als uitbreiding van de formele logica om te redeneren in situaties van onzekerheid of bij gebrek aan volledige informatie.

In de statistische mechanica hebben we het meestal over systemen met een zeer groot aantal deeltjes of vrijheidsgraden. We kennen

de exacte toestand niet van al die interagerende componenten. Bovendien zijn we niet geïnteresseerd in alle minuscule details. Het eerste objectief is het vinden of begrijpen van het *typische* macroscopisch gedrag en daarna komen de kleine en de grotere afwijkingen of fluctuaties. Hypotheses over de aard van de microscopische wereld kunnen dan getest worden met statistische methodes. Kansen verwijzen dan essentieel naar een telling van mogelijkheden die compatibel zijn met gegeven beperkingen. We hebben daarvan een voorbeeld gezien op het einde van 1.2.4 bij de irreversibiliteitsparadox.

Er is nochtans een andere interpretatie. Deze legt veel meer de nadruk op de dynamische aspecten en hoe die "als vanzelf" aanleiding kunnen geven tot ruis en stochastisch gedrag. We weten dat complexe systemen een deterministische dynamica kunnen ondergaan die, voor alle praktische doeleinden, ononderscheidbaar is van een stochastisch proces. Chaos is het meest populaire voorbeeld. De trajecten van een chaotisch systeem kunnen zo grillig en toevallig lijken dat ze evengoed als random gegenereerd kunnen gedacht worden. Het lijkt dan ook een mogelijke piste om een dynamische bron van *intrinsieke willekeur* te onderzoeken. Waarschijnlijkheid komt dan niet onze beschrijvingen binnen door onze manier van beschrijven of tellen, maar heeft een puur dynamische oorsprong.

Een derde interpretatie gaat op zoek naar de oorsprong van kansgedrag en onzekerheden in de microscopische wereld beschreven door de kwantummechanica. Daar lijken klassieke objecten zoals positie en snelheid te vervagen. Kwantummechanica is zelf een statistische theorie.

De bovenstaande interpretaties hoeven elkaar niet uit te sluiten en kunnen elkaar ongetwijfeld aanvullen. De geschiedenis van de kinetische gastheorie of van de statistische mechanica kent echter wel golven waarin nu eens het ene en dan weer het andere werd benadrukt. Deze problematiek blijft bestaan en is in elk geval niet alleen een kwestie van interpretatie of van filosofie over fundamenten.

4.2 Kwantummechanica

De fotonen-hypothese van Einstein werd niet onmiddellijk algemeen aanvaard. Integendeel, meerdere leidende fysici zagen het als een jeugdzonde van de jonge Einstein. Planck, toch heel rechtstreeks verbonden met de kwantumhypothese en ook promotor van de speciale relativiteitstheorie, hielp niet echt mee in het begrijpbaar maken van het kwantumwerk van Einstein. Het was vooral het foto-elektrische effect dat voor consensus zorgde en wel via een reeks experimenten van Robert Millikan in 1916. Het is te zeggen: men vertrouwde de vergelijking van Einstein voor het foto-elektrische effect maar niet zijn kwantum-hypothese. Het werk van Arthur Compton in 1923 betekende echter een belangrijke experimentele doorbraak: X-stralen gedragen zich als deeltjes met een impuls en een energie zoals voorgeschreven in de fotonen-hypothese van Einstein. Er waren echter nog altijd twijfels. Niels Bohr, om een andere belangrijke pionier van de kwantummechanica te noemen, verzette zich in die jaren nog heftig tegen het lichtkwantum of de foton-interpretatie.

Einstein was echter onverstoorbaar. Zijn voornaamste werken in de periode 1906–1911 waren in het domein van de ontluikende kwantumtheorie. Stralingstheorie bleef in het centrum van de aandacht. Zowel golfeigenschappen als deeltjeseigenschappen kunnen aan de elektromagnetische straling worden toegekend. Deze golf-deeltjes dualiteit met de toepassingen in de stralingstheorie waren de voornaamste voorzetten van Einstein in de eerste ontwikkeling van de kwantummechanica.

Een andere toepassing van de kwantumtheorie waar Einstein ook als eerste toe kwam, was een bijdrage tot de moderne vaste-stoffysica. In 1907 gebruikte hij de kwantumtheorie om bepaalde warmte-eigenschappen van vaste stoffen te berekenen. Hij sprak erover tijdens de eerste Solvay-conferentie in Brussel in 1911. Via de verbeteringen van Peter Debye in 1912 kwam de kwantumtheorie zo een meer traditioneel domein van de fysica binnen. De aandacht

werd verscherpt.

4.2.1 Pilootgolven

In de doctoraatsthesis (1924) van Louis de Broglie verscheen een nieuw idee dat belangrijk was voor de ontwikkeling van de kwantummechanica. Elektromagnetische straling werd oorspronkelijk beschreven, door Maxwell en Hertz, als een puur golffenomeen. Het werk van Einstein, in verband met de fotonenhypothese en verdere experimenten zoals in het foto-elektrische en het Compton-effect hadden getoond dat licht echter ook beschreven kan of moet worden als bestaande uit deeltjes. De Broglie gaat nu in de andere richting: zou het niet kunnen dat deeltjes als elektronen of biljartballen onder bepaalde omstandigheden ook beschreven kunnen of moeten worden door golven?

De golven die de Broglie wou beschrijven, worden pilootgolven genoemd; ze leiden als het ware het deeltje in de beweging. Een eerste vraag is echter wat hun golflengte zou zijn. Daarvoor is er inspiratie te rapen bij Einstein.

De frequentie van een lichtstraal waarvan de kwanta een energie E dragen is gelijk aan $\nu = E/h$. De golflengte is dus $c/\nu =$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$$

waarin de laatste gelijkheid gebruikt dat $p = E/c$ de impuls is van het kwantum. Rest om dat te veralgemenen. De Broglie neemt h/p als golflengte en E/h als frequentie van de pilootgolf die een deeltje bestuurt met totale (relativistische) energie E en impuls p. Niet alleen zal die suggestie een belangrijke inspiratie blijven voor de kwantumtheorie[3] maar het vormt ook een eerste ontmoeting

[3] Einstein drukt zich lovend uit over het werk van de Broglie, *een tip van de sluier werd opgelicht*. Hij vond de suggesties van de Broglie nuttig in zijn werk over kwantumgassen (Bose-Einstein statistiek) en daardoor werd het werk van de Broglie bijvoorbeeld ook bekend bij Erwin Schrödinger.

tussen de relativiteitstheorie en de kwantummechanica.

Vermits de constante van Planck zo “klein” is, zal de golflengte geassocieerd aan een deeltje vlug enorm klein zijn. Bijvoorbeeld, voor een zeer licht deeltje dat zeer traag beweegt, zeg met een impuls gelijk aan $p = 6.6 \times 10^{-16}$ kg m/s is de golflengte $\lambda = 10^{-18}$ m, wat onzichtbaar kan genoemd worden. Voor een elektron wordt het echter wel interessant. Bij een kinetische energie van 10 elektronvolt is het impuls $p = 1.7 \times 10^{-24}$ kg m/s en is de de Broglie golflengte dus $\lambda = 4 \times 10^{-10}$m. Dat is nog klein maar wel van de orde van de afstand tussen de atomen in een kristal. Dat is wel zichtbaar. In 1927 maakten Davisson en Germer het mogelijk om elektronen te verstrooien aan een kristal-oppervlak en typische golfeigenschappen zoals diffractie werden zichtbaar.

De relaties van de Broglie geven ook hints over de grenzen van het kwantumregime. We kunnen bijvoorbeeld de impuls $p = mv$ vervangen via de relatie (1.2.12) en krijgen een golflengte

$$\lambda \sim \frac{h}{\sqrt{mk_B T}}$$

We zien dat als de temperatuur of de massa van het deeltje klein zijn, de geassocieerde golflengte groot is. Dat betekent dat golfaspecten meer relevant worden. De reden waarom we kwantummechanica nodig hebben zelfs bij kamertemperatuur in de beschrijving van warmte en ladingstransport in metalen, is dat elektronen zo een kleine massa hebben (gelijk aan 9×10^{-31} kg): hun golfkarakter is onder deze dagelijkse omstandigheden reeds belangrijk.

4.2.2

De vergelijking van Schrödinger

Tijdens zijn werk in 1925 aan gastheorie bestudeerde Erwin Schrödinger ook het werk van de Broglie. Het was zijn inspiratie voor het formuleren in 1926 van de basisvergelijking van de kwantummechanica, de toenmalige golfmechanica.

Ik geef een heuristische motivering die er toe leidt. Een versie daarvan kan gevonden worden in elke inleiding op kwantummechanica. Samen met Schrödinger werken we niet-relativistisch[4]. We stellen

$$h\nu = E = \frac{p^2}{2m}$$

waarin we de totale energie E gelijk hebben gesteld aan de kinetische energie (geen potentiële energie) zoals voor een *vrij* deeltje. Nu is $p = h/\lambda$ zodat

$$\nu = \frac{h}{2m\lambda^2} \tag{4.2.1}$$

Nemen we een functie F waarvoor $F(\alpha + 1) = F(\alpha)$ voor elke α, Dat betekent dat F periodisch is. Daarom zal de functie

$$\psi(x,t) = F\left(\frac{x - vt}{\lambda}\right), \quad v = \lambda\,\nu \tag{4.2.2}$$

(van twee veranderlijken, x = positie en t = tijd), voldoen aan $\psi(x,t) = \psi(x+\lambda,t) = \psi(x,t+1/\nu)$. Bijgevolg correspondeert ψ aan een golf met golflengte λ en frequentie ν.
Een mogelijke keuze voor F is

$$F(\alpha) = \cos 2\pi\alpha + i\,\sin 2\pi\alpha$$

met i de imaginaire eenheid, $i^2 = -1$. Nu gaan we afgeleides nemen voor die keuze; de variaties van ψ in x en in t:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \frac{1}{\lambda^2}\,F''$$

en

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\nu\,F'$$

Omdat $F'' = 2\pi i\,F'$ zal door invullen van de conditie (4.2.1) de vergelijking

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi \tag{4.2.3}$$

voldaan zijn (per notatie is $\hbar = h/(2\pi)$). Dat is de Schrödingervergelijking voor een vrij deeltje. We hebben die niet afgeleid. Ik

[4]Dat was niet de oorspronkelijke bedoeling van Schrödinger.

heb enkel getoond dat een "vlakke" golf (4.2.2) met golflengte λ en frequentie ν voldoet aan (4.2.3) op voorwaarde dat (4.2.1) geldt.

Deze vergelijking van Schrödinger, in haar veralgemening voor interagerende deeltjes, is de start van de eigenlijke kwantummechanica. Experimentele feiten van straling, de bouw van het atoom, de chemische binding,... alle zijn onderworpen en principieel af te leiden uit de oplossing van deze vergelijking.

4.2.3

Kwantummechanica en relativiteit

De vergelijking van Schrödinger is niet-relativistisch. Een uitbreiding naar een vergelijking die verenigbaar is met de speciale relativiteitstheorie van Einstein bleek geen eenvoudige opdracht. In het spoor van Schrödinger probeerden ook Oskar Klein en Walter Gordon rond 1926-27 een relativistische golfvergelijking te vinden maar er bleven problemen met gekende resultaten (de zogenaamde fijnstructuur) voor het waterstofatoom. Er was ook het concept van spin[5] van het elektron dat Wolfgang Pauli had ontwikkeld en dat ergens moest inpassen. Het was tenslotte Paul Dirac die in 1928 de relativistische golfvergelijking voor het elektron neerschreef, automatisch met de correcte spin. Dat was een groot succes die verdere details van straling kon blootleggen. Nochtans ontdekte men later verrassingen en subtiliteiten in de Dirac-vergelijking[6].

De kwantumtheorie van de elektromagnetische interactie, de zogenaamde kwantumelektrodynamica, werd misschien wel geboren rond 1930, naar aanleiding van de vergelijking van Dirac, maar kwam toch pas in stroomversnelling na de tweede wereldoorlog. Er kwamen bovendien andere fundamentele interacties beter in zicht. Naast het elektromagnetisme kennen we nog de zwakke interactie,

[5] Het idee van een elektron met spin was afkomstig van Samuel Goudsmit en George Uhlenbeck. Spin verwijst naar een interne typisch kwantummechanische vrijheidsgraad.

[6] zoals oplossingen waarin elektronen een negatieve kinetische energie hebben... Er bleven ook problemen met de zelf-energie van het elektron; het elektron ondergaat op een eerder singuliere manier zijn eigen elektrisch veld.

belangrijk voor radioactiviteit, en de sterke interactie, die de protonen en neutronen in de kern beheerst. De relativistische veldentheorie geeft beschrijvingen van deze fundamentele interacties en ontwikkelt de theorie van elementaire deeltjes. Unificatie van deze fundamentele interacties werd een belangrijk thema. Het beste wat we hebben, is het zogenaamde standaard-model van de elementaire deeltjes, geformuleerd tegen rond 1970. Een interessante ontwikkeling daarin is dat de dualiteit kracht versus deeltjes, zoals gehanteerd in de klassieke mechanica, vervangen wordt door het concept van kwantumveld waarmee zowel deeltjes als krachtwerking worden beschreven[7].

Gravitatie zoals beschreven door Einstein valt daar grotendeels buiten. Tot op vandaag is geen wijd-erkende verzoening mogelijk gebleken van de kwantummechanica met de algemene relativiteitstheorie. Verschillende speculaties zijn gemaakt en kandidaatheorieën zijn in volle opmars. Eén van die kandidaten is snaartheorie. Experimentele verificaties zijn echter niet voor vandaag (of morgen). De belangrijkste test vandaag bestaat daarom in het kunnen consistent incorporeren van de bekende fysica.

4.3

Relativiteitstheorie

De theorie van de speciale relativiteit geraakte snel bekend, vooral in Duitsland. In het begin was er enige verwarring en men beschouwde het misschien als een in die tijd veel voorkomende

[7]Reeds Baruch Spinoza had benadrukt dat het in het wezen van de materie ligt haar eigen beweging te scheppen. Bij Newton en lang daarna was er altijd een kloof tussen hypotheses over het mechanisch gedrag van lichamen en de verklaring van de kracht die ze in beweging brengt. Met enige zin voor dramatiek kan men de woorden van Spinoza zien als een voorafschaduwing van de beschrijvingen in de kwantum veldentheorie. Daar worden interacties *gedragen* door boodschapper-deeltjes: de elektromagnetische wisselwerking wordt besteld door het foton; de vectorbosonen dragen de zwakke interactie en de gluonen verzorgen de sterke interactie. Dat project was natuurlijk reeds gestart in de beschrijving van een veldentheorie, door Maxwell voor het elektromagnetisme, en door Einstein voor gravitatie.

bijdrage aan de elektronentheorie. Men sprak ook over de Lorentz-Einstein theorie zonder de specifieke vernieuwing van Einstein te zien. Het was vooral Planck en reeds vrij direct na de publicatie van 1905, die de eerste grote fan en verspreider werd. Dankzij mensen als Planck en ook Minkowski, Ehrenfest en Laue werd de theorie gauw alom bekend en meestal aanvaard door de leidende theoretische fysici. Einstein zelf schreef en sprak veel over de theorie. Hij kwam echter ook op het spoor van een veralgemening die hij eerst in 1907 vermeldde en vanaf 1911 serieus gaat uitwerken. In 1915 gebruikt hij de term "speciale relativiteitstheorie" om het werk van 1905 te onderscheiden van de nieuwe "algemene relativiteitstheorie".

4.3.1

Algemene relativiteitstheorie

In de periode 1915-1916 kon Einstein zijn nieuwe theorie vervolmaken. Gravitatie, de theorie van de zwaartekracht, werd een meetkundige veldentheorie. De woorden van Kepler *waar er materie is, is er meetkunde* kregen een nieuwe betekenis. Einstein noemde het *de meest waardevolle ontdekking* die hij in zijn leven had gemaakt. Voor het grote publiek die in het begin van de jaren 1920 kennis maakte met de man en zijn werk, betekende het een revolutionaire doorbraak, de overgang van Newtoniaanse naar Einsteiniaanse fysica.

Het startpunt van de algemene relativiteitstheorie (AR) is opnieuw een relativiteitsprincipe: de dynamische veldvergelijkingen hebben dezelfde vorm in elk referentiekader. Op die manier is AR een metrische theorie: lengtes en tijdsintervallen zijn onafhankelijk van de keuze van de fysische meetlat of uurwerk en worden beschreven door een, wat heet, metrisch tensorveld. De ruimte zelf draagt bij zich hoe afstanden en kromming er lokaal uitzien. Dat leidt bovendien tot het equivalentieprincipe, dat de lokale fysica die wordt gezien door een waarnemer in vrije val niet wordt beïnvloed door gravitatievelden. Dat alles vormt de kinematica. De dynamica wordt gemaakt door de veldvergelijkingen van Einstein. Die verbinden de metriek met de materiële inhoud van het universum.

Vandaar komen uitdrukkingen als dat materie de ruimte kromt.

Zoals reeds uit de vaagheid van het voorgaande blijkt, is AR moeilijker te vatten dan de speciale relativiteitstheorie. De wiskunde is een stuk meer ingewikkeld, de concepten zijn complexer en toepassingen lijken nog verder weg. Het initiële succes van AR kwam dan vooral van drie voorspellingen.

Een eerste voorspelling[8] gaat over een tot dan toe onverklaarbare verandering in de locatie waar de planeet Mercurius de zon het dichtst nadert. Dat is de anomale precessie van het perihelium. De theorie van Newton gaf geen uitleg. Einstein gaf via AR een kwantitatieve verklaring. Een tweede voorspelling is de gravitationele roodverschuiving. In het kort: een klok tikt trager in de nabijheid van een zware massa. Dat kan opgemerkt worden in de meting van golflengtes van stralen, bijvoorbeeld van de zon. De derde voorspelling was de meest sensationele: dat licht afbuigt in de buurt van grote massa's. De totale zonsverduistering van 1919 bracht een expeditie op gang waarbij men het effect kon meten. Deze gebeurtenissen betekenden een keerpunt in de "sociale" geschiedenis van de relativiteitstheorie.

Vandaag blijft AR de bouwsteen van de fysische kosmologie. Experimentele AR is meer dan ooit mogelijk. Atoomklokken, raketten en satellieten maar ook computers en geavanceerd elektronisch navigatiemateriaal hebben AR veel dichter "bij huis" gebracht.

4.3.2 Kosmologie

Kosmologie wil de natuur begrijpen op de grootst mogelijke schaal, dat van het hele universum, geschiedenis en toekomst, met de methodes van de natuurwetenschappen. Dat wetenschapsdomein heeft belangrijke doorsnedes met verschillende gebieden die hier al aan bod zijn gekomen. Het vormt het toepassingsgebied bij

[8] Een voorspelling was het eigenlijk niet. Sinds 1859 wist men dat Mercurius niet helemaal de Newtoniaanse mechanica volgt bij de omwenteling rond de zon. Minstens vanaf 1907 was Einstein bezig met dat probleem.

uitstek van de relativiteitstheorie van Einstein. Vandaag is de interesse in kosmologie des te groter door de steeds beter wordende observationele mogelijkheden en omwille van nieuwe theoretische ontwikkelingen en ideeën waarin de unificatie van de kwantumtheorie met de relativiteitstheorie een belangrijk thema is.

Kosmologie is altijd en overal geliefd geweest. Toch is het zinvol om 1917 het beginjaar van de moderne wetenschappelijke kosmologie te noemen. Dat refereert natuurlijk naar het werk van Einstein over AR en naar de kosmologische beschouwingen die hij er zelf heeft aan toegevoegd.

Rond 1930 verliet men het beeld van een statisch universum. Edwin Hubble had immers gezien hoe galaxieën van elkaar wegvliegen met een snelheid die evenredig is aan hun onderlinge afstand. Dat inzicht was reeds vroeger, in 1922 en in 1927, door respectievelijk Alexander Friedmann en Georges Lemaître verwoord. Dat het universum in zekere zin een eindige leeftijd heeft en geëvolueerd is uit een "primair atoom" werd geopperd in 1931, opnieuw door Lemaître. Dat was, mits enige goede wil, het eerste big bang-model. Fysische kosmologie kwam vooral eerst de traditionele domeinen van de fysica binnen rond 1930 in de werken van Richard Tolman. Kernfysica volgde en elementaire deeltjestheorie deed haar intrede vanaf de jaren 1950. Het was vooral vanaf de jaren 1950-1960 dat de algemene relativiteitstheorie en kosmologie opnieuw in de brede belangstelling kwamen, misschien niet toevallig op hetzelfde ogenblik als de eerste exploraties in de ruimte.

Er zijn altijd meerdere elkaar bestrijdende versies geweest van de ware kosmologie. Dat is niet anders vandaag. Toch blijft sinds geruime tijd één denkkader overeind, dat van het standaard-model[9].

Het standaard-model van de fysische kosmologie is de big-bang theorie. De naam is ingeburgerd maar enigszins misleidend. Er is daar geen sprake van "een soort explosie ergens in de ruimte." We hoeven ook niet *per se* te denken aan een gebeurtenis in de tijd die

[9]De laatste 15 jaar komt dat model onder steeds grotere druk te staan.

de expansie in gang heeft gezet[10]. Dat hoort allemaal niet bij het standaard-model. Er is wel een expansie in de zin dat de gemiddelde afstand tussen twee objecten groeit met de tijd. Er is echter geen expansie *in* de ruimte. Het is de algemene relativiteitstheorie die de dynamica geeft van het expanderende universum. Terugrekenend vinden we, lang geleden, een hete en zeer dichte toestand van het universum die we identificeren met de "big bang."

Een laatste belangrijk aspect van het standaard-model wordt samengevat[11] als het kosmologische principe van Einstein. Het zegt dat de verdeling van massa in het universum essentieel homogeen is. Gemiddeld over grote schaal is de verdeling van materie homogeen en isotroop: in alle richtingen en overal is er evenveel massa. Dat kan eigenaardig lijken voor ons, bewoners van de Melkweg, maar we zijn ondertussen aan veel gewend geraakt.

Kosmologie lijkt veel meer open vragen te hebben dan men zou verwachten van een rijpe fysische theorie. Het einde is helemaal niet in zicht. Eén van de vele problemen is hoe de veelheid aan (vrije) parameters in het standaard-model kleiner kan worden gemaakt[12]. Een ander probleem heeft te maken met de grenzen van het standaard-model. Wat gebeurde er voor dat het universum begon te expanderen, en wat net na?

Kwantumtheorie ontmoette reeds kosmologie in een artikel uit 1931 van Lemaître *Het begin van de wereld uit het gezichtspunt van kwantumtheorie*. Die twee, kwantum- en relativiteitstheorie, hebben een reputatie zich enkel te verenigen in mystieke en ondoorzichtige verbanden. Vandaag blijft de vraag bestaan, voornamelijk in de zoektocht naar een kwantumtheorie voor gravitatie, in welke zin kwantumkosmologie gefundeerd kan worden.

---

[10] Zoals de heilige Augustinus, beroemd expert in de AR, het heeft verwoord: God schiep de wereld niet *in* de tijd maar *met* de tijd.

[11] Deze terminologie is afkomstig uit 1935.

[12] Einstein drukte het zo uit: *Had God wel een keuze?*

Bibliografie

De wetten van Hamurabi en Mozes zijn oud en hebben een grote invloed. De wetten van de fysica zijn nog ouder en zijn niet enkel van kracht in sommige tijden en op sommige plaatsen. Het hele universum, de tijd zelf en ook wij zijn onderhevig aan fysica. Van het allerkleinste, nog dieper dan de wereld van elektronen en fotonen, tot de allergrootste gebeurtenissen in het universum, dat alles is fysica. De mogelijke ontcijfering van enkele woorden of zinnen uit het boek van de fysica zal plezier blijven brengen aan vele volgende generaties.

Tekstboekfysica is hierboven regelmatig herhaald maar soms wat beknopter, dan weer uitgebreider in de richting van conceptuele punten of aspecten die terugkomen in de publicaties van Einstein. De tekst is niet geschikt om fysica uit te studeren. Het kan misschien wel gebruikt worden als herkauw-materiaal. Als het toch een quasi-eerste kennismaking met fysica zou zijn en blijven, raad ik aan hier een aantal boeken naast te leggen. Goede voorbeelden zijn onder andere te vinden in de lijst

S. Bergia, *Einstein, Kwanten en relativiteit: revolutie in de natuurkunde*, Deel 2 in de serie Wetenschappelijke Biografie van Natuur, Wetenschap en Techniek.

A. Einstein en L. Infeld, *The Evolution of Physics*, Simon and Schuster (1938, herdruk 1966).

H. Kragh, *Quantum Generations, a history of physics in the twentieth century*, Princeton University Press, Princeton,

New Jersey (1999).

M.S. Longair, *Theoretical concepts in physics*, Cambridge University Press (1984).

R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press (1989). Vertaling: De nieuwe geest van de keizer, Prometheus (1989).

fachen formalen Sch
Bild der komplexeren Erscheinungen zu kons
sucht die kinetische Gastheorie die mechan
ischen und Diffusionsvorgänge auf Beweg
Molekülen zurückzuführen, d.h. aus der Hypoth
Molekularbewegung zu konstruieren. Wenn man
t, es sei gelungen, eine Gruppe von Naturvorgängen
eifen, so meint man damit immer, dass eine kon
ive Theorie gefunden sei, die die betreffenden Vorgänge um
Es gibt aber neben dieser wichtigsten Klasse vo
e zweite, die ich als Prinzip-Theorien benennen will. Di
n sich nicht der synthetischen, sondern der analytischen
Methode. Ausgangspunkt und Fu
bei ihnen nicht hypothetische Elemente, sondern empi
gefundene allgemeine Eigenschaften der Naturvorgänge, P
aus denen dann mathematisch formulierte Kriterien folgen, de
einzelnen Vorgänge bzw. deren theoretische Bil
genügen müssen. So sucht die Thermodynamik
dem allgemeinen Erfahrungsresultat, dass ein
mobile unmöglich sei, auf analyti
Beziehungen zu ermitteln, denen die ei
Vorgänge genügen müssen.
Der Vorzug der konstruktiven Theorien ist Vollstä
Anpassungsfähigkeit und Anschaulichkeit, d
Prinzip-Theorien ist logische Vollkommen
Sicherheit der Grundlage.
Die Relativitätstheorie gehört zu den Prinzip-Th
Wesen zu erfassen, muss man also in erster Li
Prinzipe kennen lernen, auf denen sie beruht. Be